Opća fizika 3: titranja i valovi

Matko Milin
Fizički odsjek
Prirodoslovno-matematički fakultet
Sveučilišta u Zagrebu

28. rujna 2015.

Sadržaj

Uvod

Gibanja u prirodi možemo podijeliti na periodička ("titranja") i ona koja to nisu ("neperiodička") - u ovoj skripti prvenstveno ćemo se baviti ovim prvim. Periodička titranja mogu biti harmonička ili aharmonička; naša razmatranja na početku ćemo usmjeriti na harmonička, da bi kasnije razvili formalizam kojim je moguće tretirati i posve općenita titranja.

Sljedeća velika cjelina kojoj ćemo se posvetiti je fizika valova, fenomena koji povezujemo s komunikacijom, svjetlošću, muzikom, Dopplerovim efektom itd. Riječ je ujedno i o gradivu koje je iznimno važno za kasnija razmatranja u kvantnoj fizici, o kojoj se ponekad govori i kao o "valnoj mehanici".

Kao i na prethodnim kolegijima, smisao ove skripte **nije** taj da odigra ulogu udžbenika, već prvenstveno da definira gradivo koje student treba naučiti u okviru kolegija "Opća fizika 3" na istraživačkom smjeru studija fizike na PMF-u u Zagrebu, te da ga usmjeri k drugim materijalima. Kao pedagoški puno bolje napisani tekstovi preporučuju se sljedeći udžbenici:

- F.S. Crawford: "Waves" (Berkeley Physics Course, vol. III), McGraw-Hill, New York, 1965.
- H.D. Young, R.A. Freedman: "Sears and Zemansky's University Physics", Pearson-Addison Wesley, San Francisco, 2004.

Kao izvrsne alternative gornjim udžbenicima preporučuju se i:

- H.J. Pain: "The Physics of Vibrations and Waves", John Wiley & Sons Ltd, 2005.
- H. Georgi: "The Physics of Waves", Prentice Hall, 2006.

Zbirke koje sadrže zadatke usporedive s onima koje se rješavaju na vježbama su npr.:

- I.E. Irodov: "*Problems in General Physics*", Mir publishers Moscow, 1993.
- M. Planinić, N. Poljak: "*Zbirka zadataka iz titranja i valova*", Školska knjiga, 2012.

Zajedno s redovitim pohađanjem predavanja i vježbi, te starim pismenih ispitima, navedeni materijali trebali bi biti dostatni za uspješno polaganje kolegija.

U pripremi ovog teksta korišteni su materijali i iskustva dosadašnjih predavača općih fizika na istraživačkom smjeru, prof. K. Ilakovca, prof. B. Leontića, prof. E. Babića, prof. M. Furića i prof. A. Dulčića. Svima njima zahvaljujem, a posebno prof. A. Dulčiću čija mi je inicijalna pomoć bila i više nego dragocjena.

1

Načini titranja u mehaničkim sustavima

U ovom ćemo poglavlju prvo ponoviti osnovno razmatranje harmonijskog gibanja[1], a zatim ćemo istim formalizmom promotriti kompliciranije sisteme (npr. s više vezanih čestica). Za početak ćemo promotriti samo tzv. "slobodna" titranja, u smislu da ne postoji vanjska sila koja ih "tjera" ili "guši". Uz već poznate primjere s "Opće fizike 1", pokazat ćemo da se harmonijsko titranje pojavljuje u mnoštvu drugih scenarija (za sada ćemo razmotriti samo mehaničke primjere).

1.1 Jednostavan harmonijski oscilator

Promotrimo jednostavan harmonijski oscilator, opisan sljedećom diferencijalnom jednadžbom (tzv. jednadžbom harmonijskog oscilatora):

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u = 0} \quad .$$

Varijabla u može biti bilo koja fizička veličina - u mehaničkim sustavima to će u pravilu biti odmak od ravnotežnog položaja, ili tzv. *elongacija* (mjerena u jedinicama duljine). Općenitije, u može biti npr. tlak, naboj itd. U dijelu se literature za takvu općenitu veličinu koristi oznaka Ψ, radi kasnije veze s kvantnom mehanikom - takav način označavanja ima svojih prednosti, no i nemalih mana, pa ćemo mi ipak koristiti "neutralniju" oznaku u.

Veličina ω_0 je tzv. *vlastita ili svojstvena kutna (ili kružna) frekvencija* sustava: "vlastita" jer se odnosi na ponašanje harmonijskog oscilatora **bez** prisustva vanjske sile - dakle, ovisna je samo o svojstvima samog harmonijskog oscilatora. Direktnim se uvrštavanjem može provjeriti da su rješenja diferencijalne jednadžbe harmonijskog oscilatora općenito oblika:

$$\boxed{u(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi)} \quad ,$$

gdje je:
- $u(t)$ ... elongacija (otklon iz ravnoteže);
- A ... amplituda (maksimalan otklon iz položaja ravnoteže);
- ω_0 ... svojstvena ili vlastita kružna frekvencija;
- $\omega t + \phi$ ... faza titranja u trenutku t;
- ϕ ... "fazni pomak" (tj. faza u trenutku t=0).

[1] Vidi skriptu iz "Opće fizike 1", osmo poglavlje.

Ako je titranje periodičko, možemo definirati njegov period: **period titranja** T je vrijeme između dva uzastopna ponavljanja iste elongacije i njezine promjene (brzine), pa za njega stoga vrijedi:

$$u(t+T) = u(t) \quad ,$$

iz čega slijedi:

$$A \sin\left[\omega_0(t+T)+\phi\right] = A\sin\left(\omega_0 t+\phi\right) \quad .$$

T je najkraće vrijeme u kojem se postiže jednakost sinusa, pa mora vrijediti:

$$\omega_0 T = 2\pi \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad .$$

Frekvenciju (ili učestalost) ν ponavljanja neke periodične pojave definiramo kao recipročnu vrijednost perioda, pa vrijedi:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi/\omega_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_0 = 2\pi\nu \quad .$$

Uobičajeno se frekvenciju ν izražava pomoću mjerne jedinice Hz, dok se kutna frekvencija ω iskazuje u s^{-1}, iako je, dakako, riječ o temeljno istim mjernim jedinicama.

Općenito kod različitih harmonijskih titranja, za kutnu frekvenciju vrijedi:

$$\omega_0^2 = \frac{\text{(povratna sila)}}{\text{(tromost)} \cdot \text{(pomak)}} \quad ; \tag{1.1}$$

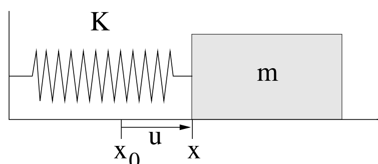
pri tome je, dakako, silu, tromost i pomak potrebno poopćiti. Navedeni izraz ilustrirat ćemo na par primjera, pri čemu su prva dva ponavljanje gradiva "Opće fizike 1".

1.1.1 Masa zakačena na horizontalno položenu elastičnu oprugu

Zakačimo masu m na kraj elastične opruge, za koju je *povratna sila* dana s:

$$\vec{F} = -K\vec{u} \quad ,$$

gdje je $\vec{u}=u\hat{\imath}=x\hat{\imath}-x_0\hat{\imath}$ pomak mase iz položaja ravnoteže (vidi sliku 1.1), a K konstanta elastičnosti opruge (oznaku k uobičajeno ćemo kasnije koristiti za kutni valni broj, pa zato za konstantu elastičnosti koristimo K). Trenje se u ovom primjeru zanemaruje, podloga služi samo zato da ograniči gibanje na jedan smjer; jedinu os koordinatnog sustava (x) biramo tako da se poklapa s tim smjerom. Uočite da je odabir točke na masi u odnosu na koju ćemo proučavati gibanje posve proizvoljan - ovdje smo izabrali lijevi rub, dok ćemo kasnije kao referentnu točku koristiti npr. težište tijela.



Slika 1.1: Masa na opruzi.

Newtonov zakon nam u ovom scenariju daje sljedeću jednadžbu gibanja:

$$ma = F \qquad , \qquad a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} \quad ,$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = -Ku \quad ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{K}{m}u = 0 \quad .$$

Ovo je, dakako, jednadžba harmonijskog oscilatora, uz zamjenu:

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} \quad .$$

Postavimo li oprugu vertikalno, jedino što će se promijeniti je lokacija ravnotežnog položaja, dok svojstvena frekvencija ostaje ista (što je pokazano na "Općoj fizici 1"). Upotrebom pravila 1.1 isti rezultat se dobiva uzmemo li za povratnu silu Ku, za tromost m, a za pomak u.

Demonstracijski pokus 1.1: promjena frekvencije titranje opruge za različite mase i opruge.

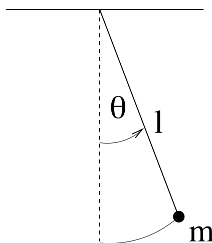
Važno uočiti: frekvencija titranja ovisi o masi i opruzi, ali *ne ovisi* o amplitudi titranja (za male amplitude)!

1.1.2 Matematičko njihalo

Matematičko (ili jednostavno) njihalo je sistem sastavljen od tanke, nerastezljive niti zanemarive mase, te mase m čija se prostorna dimenzija može zanemariti (pa govorimo o "točkastoj masi"). Ravnotežni položaj je onaj u kojem se masa m nalazi točno ispod objesišta - odmaknemo li je iz tog položaja, povratna sila bit će jednaka komponenti težine tangencijalnoj na kružnicu po kojoj se masa može gibati:

$$F = -mg\sin\theta \quad ,$$

gdje je θ između vertikale i trenutačnog položaja niti (vidi sliku 1.2), a predznak minus posljedica činjenice da ova sila *uvijek djeluje prema* ravnotežnom položaju (drugim riječima, sila djeluje u smjeru suprotnom smjeru porasta kuta θ).



Slika 1.2: Matematičko njihalo.

Po drugom Newtonovom zakonu, ova sila izaziva akceleraciju jednaku F/m, odnosno kutnu akceleraciju jednaku $F/(ml)$, gdje je l duljina niti. Povratnu silu F izjednačavamo, dakle, s $ml\alpha$, gdje je α kutna akceleracija, pa dobivamo:

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\theta \quad .$$

U limesu malih kutova otklona vrijedi:

$$\sin\theta \approx \theta \quad ,$$

pa se dobiva (nakon kraćenja s m):

$$l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -g\theta \quad .$$

Napišemo li ovu jednadžbu u standardnom obliku jednadžbe harmonijskog oscilatora, dobivamo:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad ,$$

iz čega vidimo da je svojstvena frekvencija ovog sistema:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \quad .$$

Upotrebom pravila 1.1 isti rezultat se dobiva uzmemo li za povratnu silu $mg\theta$, za tromost m, a za pomak $l\theta$.

Demonstracijski pokus 1.2: promjena frekvencije titranja matematičkog njihala za različite mase i duljine niti.

Važno uočiti: frekvencija titranja ovisi o duljini niti, ali *ne ovisi* o masi tijela, te amplitudi titranja (za malene amplitude)!

Potpunosti radi, promotrimo i sile u smjeru okomitom na smjer gibanja mase na niti. Masa se giba po kružnoj putanji, pri čemu je centripetalna akceleracija posljedica razlike sile napetosti niti i radijalne komponente gravitacijske sile:

$$ma_{cp} = T - mg\cos\theta \quad .$$

Odavdje iščitavamo kako se napetost niti mijenja pri titranju:

$$T = mg\cos\theta + ma_{cp} = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{l} \quad .$$

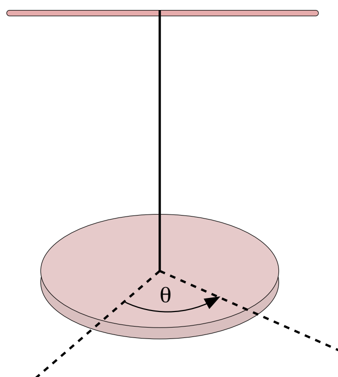
Oba člana u izrazu za napetost maksimalna su u položaju ravnoteže (θ=0) - i vjerojatnost da nit pukne zbog prevelike napetosti stoga je najveća baš u tom položaju. Dakako, ako promatramo samo male oscilacije, tada su i varijacije sile napetosti malene, pa samo u vrlo specijalnim situacijama dolazi do pucanja niti.

1.1.3 Torzijsko njihalo

Torzijsko njihalo sastoji se od diska koji je u centru obješen pomoću elastične žice (slika 1.3). Disk rotira oko osi (koja se poklapa s žicom), a zbog torzije pojavljuje se moment sile koji je proporcionalan kutu zaokreta ϕ (ϕ je kut između ravnotežnog položaja diska i njegovog trenutačnog položaja):

$$M = -D\phi \quad .$$

Konstanta proporcionalnosti D obično se naziva koeficijentom torzije žice (vidi i treće poglavlje skripte iz "Opće fizike 1"). Minus se u gornjem izrazu pojavljuje zbog činjenice da izazvani moment sile pokušava disk vratiti u ravnotežni položaj (dakle, kut ϕ raste u smjeru *suprotnom* od smjera prema kojem moment sile izaziva rotaciju).



Slika 1.3: Torzijsko njihalo.

Ovakav moment sile stvara kutno ubrzanje po sljedećem izrazu:

$$I\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} = -D\phi \quad ,$$

što vodi na diferencijalnu jednadžbu harmonijskog oscilatora:

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{D}{I}\phi = 0 \quad .$$

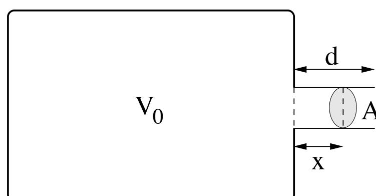
Dakle, vidimo da je svojstvena frekvencija ovog sistema:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}} \quad .$$

Upotrebom pravila 1.1 isti rezultat se dobiva uzmemo li za "povratnu silu" $D\phi$, za "tromost" I, a za "pomak" ϕ.

1.1.4 Akustički ili Helmholtzov rezonator

Helmholtzov rezonator je bilo kakva šupljina s uskim grlom ("boca"), ispunjena zrakom koji je izbačen iz ravnotežnog stanja npr. puhanjem - kao što ćemo pokazati u nastavku, kod takvog sistema tlak će harmonijski oscilirati zbog "tromosti stupca" zraka na samom izlazu iz šupljine ("grlu"). Oscilacije tlaka dovode do nastanka zvuka; od tuda i ime "akustički" oscilator za ovakav sistem. Helmholtz je prvi uočio da je (uz ovakvu geometriju rezonatora) ton koji se postiže puno niži nego da je u pitanju tzv. "zatvorena svirala" (koja će biti obrađena u poglavlju 6) - tzv. Helmholtzova aproksimacija pretpostavlja da se svo gibanje zraka dešava samo u grlu boce, dok sva povratna sila nastaje zbog promjene tlaka u samoj boci (u tom je smislu zrak u grlu "masa", a zrak u boci "opruga"). U nastavku ćemo naći frekvenciju titranja zraka uz ovakvu jednostavnu pretpostavku.



Slika 1.4: Helmholtzov rezonator.

Promotrimo bocu volumena V_0 ispunjenu nekim plinom, na kraju koje se nalazi grlo poprečnog presjeka A i duljine d (vidi sliku 1.4). Pitamo se što se dešava s plinom u šupljini boce nakon što ga izbacimo iz ravnoteže. Ako tlak plina u boci u nekom trenutku postane veći nego u okolini, plin originalnog volumena V_0 će se raširiti i ispuniti i dio grla boce duljine x (slika 1.4). Volumen boce zajedno s grlom u tom je trenutku stoga dan s:

$$V = V_0 + Ax \quad .$$

Ako je tlak u boci jednak p, a vanjski tlak jednak p_0, zbog razlike tlakova na plin u grlu djeluje (prema van) ukupna sila jednaka $(p-p_0)A$. U grlu boce nalazi se ukupna masa plina jednaka $d{\cdot}A{\cdot}\rho$ (gdje je ρ gustoća plina), pa se drugi Newtonov zakon za tu masu svodi na jednadžbu:

$$dA\rho\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = (p - p_0)A \quad ,$$

gdje smo ubrzanje promatranog volumena plina zapisali pomoću parametra x (tj. položaja "granice" između originalnog i trenutačnog volumena plina).

Pretpostavljamo da pri opisanom gibanju plina ne dolazi do izmjene topline s okolinom, tj. da je riječ o *adijabatskom procesu*, kojeg ćemo detaljno proučiti na "Općoj fizici 4". Ova je pretpostavka posve razumna jer se pomaci zraka dešavaju u dovoljno kratkim vremenima da ne dolazi do značajnog prijenosa topline (koji je uvijek relativno spor). Za takve procese pokazat ćemo na "Općoj fizici 4" da zadovoljavaju izraz:

$$pV^\gamma = p_0V_0^\gamma \quad ,$$

gdje je γ tzv. adijabatski koeficijent promatranog plina. Uvrštavanjem dobivamo:

$$d\rho\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = p_0\left(\frac{p}{p_0} - 1\right) = p_0\left(\frac{V_0^\gamma}{V^\gamma} - 1\right) = p_0\left(\frac{1}{\left(1 + \frac{Ax}{V_0}\right)^\gamma} - 1\right) \quad .$$

Budući da je volumen Ax malen u odnosu na V_0 (tj. grlo boce puno je manje od njenog ukupnog volumena), razlomak u zagradi možemo razviti u red i zadržati se samo na prva dva člana razvoja; tada dobivamo:

$$d\rho\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \approx p_0\left(1 - \gamma\frac{Ax}{V_0} - 1\right) = -\gamma p_0\frac{Ax}{V_0} \quad .$$

Dakle:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\gamma Ap_0}{d\rho V_0}x = 0 \quad ,$$

što je jednadžba harmonijskog oscilatora s vlastitom frekvencijom:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma Ap_0}{d\rho V_0}} \quad .$$

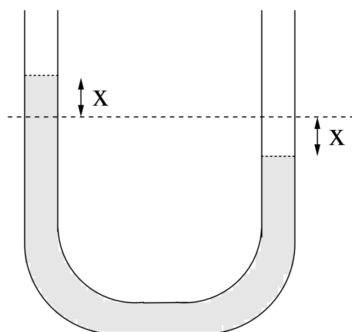
Kasnije (u šestom poglavlju) bit će pokazano da je zvuk posljedica osciliranja tlaka i gustoće zraka oko neke ravnotežne vrijednosti, a to se zorno pokazuje ovakvim jednostavnim primjerom i odgovarajućim demonstracijskim pokusom.

Demonstracijski pokus 1.3: nastanak zvuka kod Helmholtzovog rezonatora.

Važno uočiti: frekvencija zvuka mijenja se dolijevanjem vode u bocu jer se time mijenja efektivni volumen V_0 kojeg zrak ima na raspolaganju.

1.1.5 Tekućina u U-cijevi

Pogledajmo na kraju još jedan jednostavan primjer mehaničkog titranja, ovaj put na sustavu u tekućem stanju. Izmaknemo li tekućinu u U-cijevi kao na slici 1.5, doći će do harmonijskog titranja nivoa tekućine oko ravnotežnog položaja (ako je trenje između tekućine i stijenki U-cijevi zanemarivo), kao što će biti pokazano u nastavku.



Slika 1.5: Tekućina u U-cijevi.

Jednadžbu harmonijskog oscilatora izvodimo, dakako, krećući od drugog Newtonovog zakona:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F \quad ,$$

gdje je F ukupna povratna sila, m **ukupna masa** tekućine u cijevi:

$$m = lA\rho \quad ,$$

te l duljina dijela cijevi ispunjenog tekućinom, a A njen poprečni presjek. Povratna sila F posljedica je razlike tlakova u dvama stupcima; budući da je razlika nivoa tekućine jednaka $2x$ (na slici je nivo tekućine u lijevom stupcu za x viši od ravnotežnog, dok je u desnom za x niži od ravnotežnog), "višak" tekućine u lijevom stupcu ima volumen jednak $2xA$, a povratna je sila stoga dana s:

$$F = -(2xA)\rho g \quad .$$

Po iznosu to je, dakako, jednako težini "viška" tekućine u lijevom stupcu. Uvrštavanjem u drugi Newtonov zakon dobiva se:

$$lA\rho\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -2Ax\rho g \quad ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2g}{l}x = 0 \quad ,$$

što je opet jednadžba harmonijskog oscilatora vlastite frekvencije:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}} \quad .$$

Upotrebom pravila 1.1 isti se rezultat dobiva uzmemo li za "povratnu silu" $(2xA)\rho g$, za "tromost" $lA\rho$, a za "pomak" x.

1.1.6 Faza harmonijskog titranja

Podsjetimo se još na kraju ovog uvodnog razmatranja značaja faze harmonijskog oscilatora; promotrimo u tom smislu opet općenito rješenje jednadžbe harmonijskog oscilatora:

$$u(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad , \tag{1.2}$$

Parametar ϕ faza je titranja u trenutku t=0, dok je u proizvoljnom trenutku faza jednaka $(\omega_0 t + \phi)$.

Faza ϕ može poprimati razne vrijednosti, no dva su slučaja posebno interesantna:
1) ϕ=0, tj. $u(t) = A \sin(\omega_0 t)$.
Uvrstimo li t=0 u ovaj izraz, dobivamo $u(0)$=0 i du/d$t(0)$=$\omega_0 A$. Takvo titranje ostvaruje se, dakle, tako da u t=0 oscilator stavimo u položaj ravnoteže, te mu naglo damo početnu brzinu (npr. kod mehaničkih oscilatora ga kratko udarimo).
2) ϕ=$\pi/2$, tj. $u(t) = A \cos(\omega_0 t)$.
Uvrstimo li sada t=0, dobivamo $u(0)$=A, te du/d$t(0)$=0. Dakle, ovakvo titranje ostvarujemo tako da u t=0 pomaknemo oscilator iz položaja ravnoteže za iznos A i nakog toga ga pustimo bez početne brzine.

Bilo koje drugo harmonijsko titranje može se raspisati kao superpozicija gornja dva. Drugim riječima, općenito rješenje diferencijalne jednadžbe harmonijskog oscilatora može se, osim u obliku 1.2, zapisati i kao:

$$u(t) = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t) \quad .$$

Iskoristimo li u izrazu 1.2 raspis sinusa sume, dobivamo:

$$u(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) = A \sin(\omega_0 t) \cos \phi + A \cos(\omega_0 t) \sin \phi \quad ,$$

odakle nalazimo sljedeću vezu među konstantama u dva različita zapisa:

$$C_1 = A \cos \phi \quad , \quad C_2 = A \sin \phi \quad ,$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad , \quad \phi = \text{arctg}\, \frac{C_2}{C_1} \quad .$$

Koji ćemo zapis koristiti ovisi, dakako, o konkretnom problemu.

1.1.7 Energija mehaničkog titranja

Na "Općoj fizici 1" pokazali smo da su prosječne kinetičke i potencijalne energije tijekom jednog perioda (a time i njihovog proizvoljnog višekratnika) jednake:

$$\langle E_p \rangle = \langle E_k \rangle \quad ,$$

te proporcionalne kvadratu amplitude. Na primjer, za masu na opruzi pokazali smo da vrijedi:

$$\langle E_p \rangle = \langle E_k \rangle = \frac{1}{4} K A^2 = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2 \quad ,$$

pa je ukupna energija bila dana s:

$$\langle E_{tot} \rangle = \frac{1}{2} K A^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \quad .$$

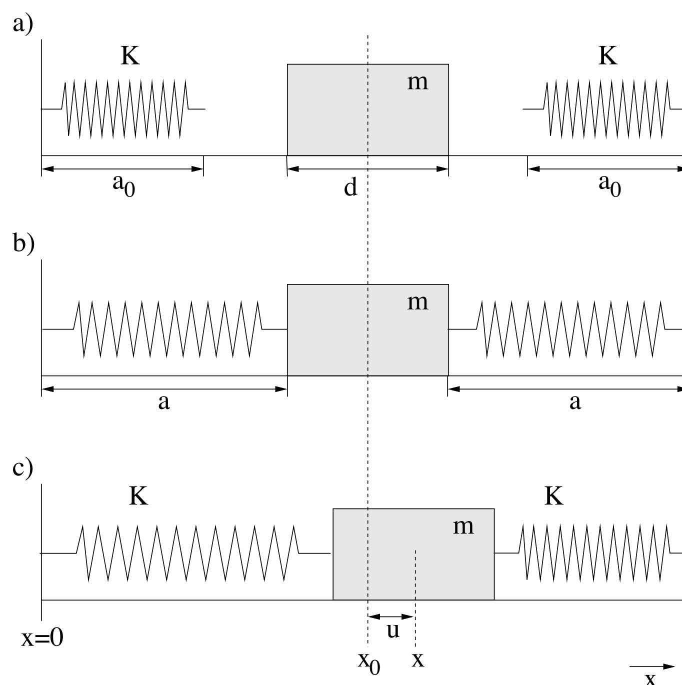
Ovaj ćemo rezultat koristiti u nastavku, te poopćiti na proizvoljna titranja.

1.2 Slobodno titranje jednog tijela u složenim sustavima

1.2.1 Longitudinalno titranje tijela vezanog dvama jednakim oprugama

Pređimo sada s jednostavnih sustava (razmatranih u prošlom potpoglavlju) na malo kompliciranije: i dalje ćemo gledati što se dešava samo jednim tijelom, no na njega će djelovati dvije ili više sila. Prvi primjer takvog sustava je tijelo vezano s dvije opruge, kao na slici 1.6 - u ovom ćemo potpoglavlju pokazati da ono može oscilirati na dva nezavisna načina. Razmotrimo prvo titranje u smjeru pružanja opruge, tzv. **longitudinalno titranje**.

Promotrimo masu m koja je vezana na dvije jednake (fiksirane) opruge konstante K. Duljina svake od opruga je a_0 kada je opruga nerastegnuta, kao na slici 1.6a. Pri razmatranju u ovom poglavlju eksplicitno ćemo u formule uvesti i dimenziju (širinu) tijela d; na kraju poglavlja zaključit ćemo da su nam svi bitni rezultati (npr. frekvencija) neovisni o toj veličini, pa ćemo je u sljedećim poglavljima zanemariti (tj. radi jednostavnosti pretpostaviti da je d=0).



Slika 1.6: Longitudinalne oscilacije mase s dvije opruge.

Spojimo li opruge na tijelo, one će se u našem primjeru rastegnuti (na duljinu a) jer je razmak između točaka u kojima su opruge fiksirane *veći* od sume duljina nerastegnutih opruga i širine tijela d (vidi sliku 1.6b). Dakako, moguća je i situacija da su nakon spajanja na tijelo opruge stisnute (kraće nego kad su slobodne), ali taj slučaj ne donosi ništa bitno novo u odnosu na situaciju koju smo odabrali razmatrati. Budući da su opruge identične, tijelo će u ravnoteži biti kada mu je težište točno na polovici razmaka točaka u kojima su opruge fiksirane. Pri tome u svakoj od opruga postoji napetost jednaka po iznosu $K(a-a_0)$.

Izbacimo li tijelo mase m iz ravnoteže *u smjeru* pružanja opruge (kao na slici 1.6c), napetost će se promijeniti u obje opruge. Gibanje mase m odvijat će se u samo jednoj dimenziji - položaj težišta tijela parametrizirat ćemo s x (neka bude x=0 u točki u kojoj je fiksirana lijeva opruga, te neka x raste s lijeva na desno). Sila s kojom će lijeva opruga djelovati na tijelo jednaka je:

$$F_l = -K(x - d/2 - a_0) \quad ,$$

jer je $x-d/2$ duljina lijeve opruge u danom trenutku. Predznak "$-$" posljedica je činjenice da ova sila djeluje ulijevo (u smjeru negativnog x) ako je opruga rastegnuta. Ukupni razmak između dva zida (tj. točaka u kojima su fiksirane opruge) jednak je $2a+d$, pa je duljina desne opruge na slici 1.6c) jednaka:

$$(2a+d)-(x-d/2)-d = 2a+d/2-x \quad .$$

Sila s kojom će desna opruga djelovati na tijelo jednaka je stoga:

$$F_d = +K(2a+d/2-x-a_0) \quad .$$

Predznak "+" posljedica je činjenice da ova sila djeluje udesno ako je opruga rastegnuta.

Ukupna povratna sila bit će jednaka:

$$F = F_l + F_d = -K(x-d/2-a_0) + K(2a+d/2-x-a_0) = K(2a-2x+d) = -2K(x-a-d/2) \quad .$$

I odavde vidimo da povratne sile nema kada je $x{=}x_0{=}a{+}d/2$; tijelo mase m je tada u ravnoteži (kao na slici 1.6b). Uočite da se duljina nerastegnute opruge a_0 ne pojavljuje u konačnom izrazu. Uvrstimo li dobivenu povratnu silu u drugi Newtonov zakon, dobivamo:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -2K\left(x-a-\frac{d}{2}\right) \quad .$$

Ova diferencijalna jednadžba nije formalno jednaka jednadžbi harmonijskog oscilatora, ali na nju se svodi uz trivijalnu zamjenu:

$$u = x - x_0 = x - a - d/2 \quad .$$

Dvostrukim deriviranjem ovog izraza dobivamo:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \quad ,$$

pa uvrštavanjem drugi Newtonov zakon za ovaj sistem postaje:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{2K}{m}u \quad .$$

Dakle, sistem će oscilirati harmonijski s kružnom frekvencijom za koju vrijedi:

$$\omega_0^2 = \frac{2K}{m} \quad .$$

Ovaj rezultat je očekivan jer smo u odnosu na jednostavan primjer iz prošlog potpoglavlja samo udvostručili broj opruga, a time i povratnu silu. Istu frekvenciju titranja dobili bismo i za sistem s jednom oprugom dvostruko veće konstante elastičnosti.

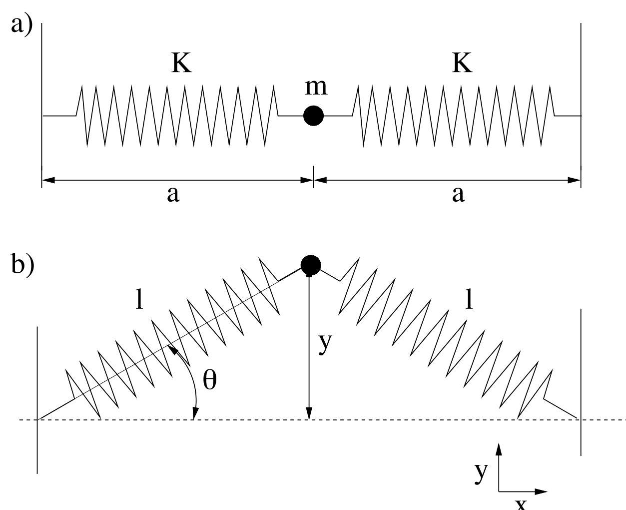
Demonstracijski pokus 1.4: longitudinalne oscilacije mase s dvije opruge.

Važno uočiti: frekvencija titranja ovisi o masi i opruzi, ali *ne ovisi* o amplitudi titranja!

Važno je još uočiti sljedeće: iako opruge u ravnotežnom položaju imaju drukčiju (veću ili manju) duljinu (a) u odnosu na vlastitu (a_0), pa u njima već postoji napetost, gibanje sustava bit će određeno samo **pomacima iz ravnoteže** u, odnosno dodatnim napetostima koje se zbog tih pomaka pojavljuju. Ovaj ćemo zaključak koristiti kod kompliciranijih sustava, npr. kod longitudinalnog titranja sustava s dvije mase vezane s trima oprugama (na str. 14). Kao što smo već i najavili, budući da ni dimenzija (širina) tijela d ne ulazi u izraz za frekvenciju (ili bilo koju drugu bitnu veličinu), u narednim ćemo poglavljima pretpostaviti da je tijelo koje titra zanemarive dimenzije ($d{=}0$).

1.2.2 Transverzalno titranje tijela vezanog dvama jednakim oprugama

Pogledajmo sad identičan sustav kao u prethodnom poglavlju, ali podvrgnut gibanju u smjeru koji je okomit na smjer pružanja opruga - u takvoj situaciji govorimo o tzv. **transverzalnim oscilacijama**. Da pojednostavimo "geometrijski" dio ovog problema, pretpostavit ćemo da je dimenzija tijela zanemarivo malena u odnosu na veličinu opruga (dakle, za veličinu d korištenu u prethodnom poglavlju vrijedi $d \approx 0$, a tijelo na sliku ucrtavamo kao maleni krug) - tada imamo situaciju ilustriranu na slici 1.7. Bilo kakve gravitacijske efekte zanemarujemo, pa su elastične sile jedine koje djeluju na tijelo.



Slika 1.7: Transverzalne oscilacije mase spojene na dvije opruge.

Transverzalne oscilacije moguće su u smjeru označenom na slici 1.7 kao smjer y, ali također i u smjeru okomitom na ravninu papira (smjer z, neoznačen na slici). Da pojednostavimo problem, pretpostavit ćemo postojanje oscilacija samo u y-smjeru (smjer z mu je posve ravnopravan i ništa se bitno drugačije ne dešava duž njega). Ishodište y-osi odabrat ćemo na spojnici točaka u kojima su opruge fiksirane (dakle, za točku ravnoteže imamo y=0). Osciliranje u x-smjeru je longitudinalno i kao takvo obrađeno u prethodnom potpoglavlju - ovdje ćemo pretpostaviti da ne postoji, a kasnije (u petom poglavlju) pokazati kako tretirati situaciji kada postoji i longitudinalno i transverzalno osciliranje.

U ravnotežnom položaju (slika 1.7a) svaka opruga napeta je silom iznosa:

$$T_0 = K(a - a_0) \quad ;$$

taj je dio identičan longitudinalnom slučaju. Izmaknemo li masu iz ravnoteže duž y-osi (slika 1.7b), napetost svake od opruga (po iznosu) postaje jednaka:

$$T = K(l - a_0) \quad .$$

Budući da su x-projekcije dvaju napetosti iste po iznosu, a suprotnog smjera, ukupna sila u x-smjeru bit će jednaka nuli - takvi početni uvjeti vodit će, dakle, na gibanje samo u transverzalnom smjeru. U y-smjeru svaka od opruga će na masu m djelovati povratnom silom iznosa $T \sin\theta$, gdje je θ kut između opruge u ravnotežnom i trenutačnom položaju (vidi sliku 1.7b). Budući da vrijedi:

$$\sin\theta = \frac{y}{l} \quad ,$$

drugi Newtonov zakon za ovaj sustav daje:

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -2T\sin\theta = -2K(l-a_0)\frac{y}{l} = -2Ky\left(1-\frac{a_0}{l}\right) \quad .$$

Duljina l ovisna je o elongaciji titranja y preko izraza (vidi sliku 1.7b):

$$l = \sqrt{a^2+y^2} \quad ;$$

uvrštavanjem u drugi Newtonov zakon dobivamo sljedeću jednadžbu gibanja:

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -2Ky\left(1-\frac{a_0}{\sqrt{a^2+y^2}}\right) \quad . \tag{1.3}$$

Dobivena diferencijalna jednadžba **nije** jednadžba harmonijskog oscilatora jer povratna sila nije linearno ovisna o odmaku iz ravnoteže y, pa transverzalno titranje općenito neće biti harmonijsko.

Titranje opisano izrazom 1.3 postaje harmonijsko ako je zadovoljena barem jedna od sljedećih aproksimacija:

1) Opruga je jako istegnuta čak i u ravnotežnom položaju (tj. vrijedi $a \gg a_0$). U ovoj aproksimaciji vrijedi:

$$\frac{a_0}{a^2+y^2} \ll 1 \quad ,$$

pa se taj član u zagradi općeg izraza može zanemariti i dobivamo:

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -2Ky \quad ,$$

odnosno harmonijsko titranje s:

$$\omega_0^2 = \frac{2K}{m} \quad .$$

Frekvencija titranja u ovom je limesu jednaka frekvenciji longitudinalnih oscilacija. Ovaj limes se uobičajeno naziva *čvrstom ili tijesnom aproksimacijom* (*engl.* **slinky** approximation), i mi ćemo ga često koristiti i u kompliciranijim situacijama.

2) Pomaci iz položaja ravnoteže su **maleni**, tj. vrijedi: $y \ll a$. U ovom limesu y^2 možemo zanemariti u odnosu na a^2, pa povratna sila postaje linearna i jednaka:

$$F = -2K\left(1-\frac{a_0}{a}\right)y \quad ,$$

te titranje harmonijsko s frekvencijom za koju vrijedi:

$$\omega_0^2 = \frac{2K}{m}\left(1-\frac{a_0}{a}\right) \quad .$$

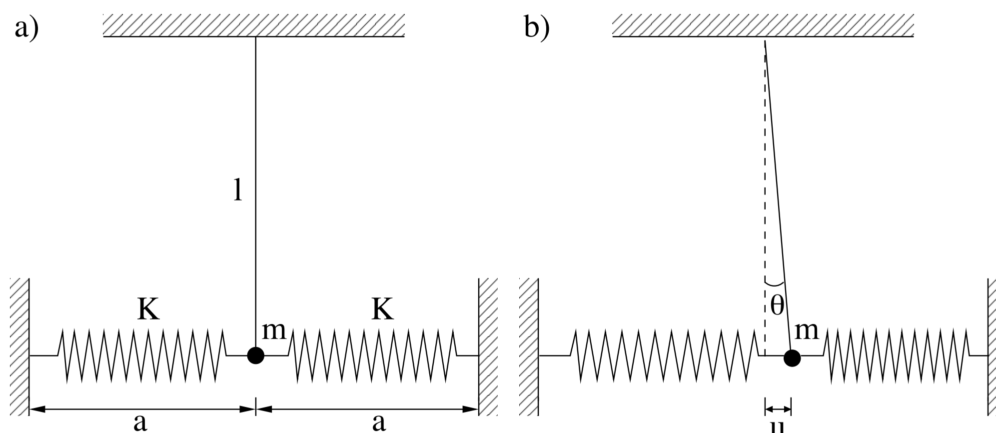
Ova frekvencija je **manja** od frekvencije longitudinalnog titranja istog sistema.

Demonstracijski pokus 1.5: transverzalne oscilacije mase s dvije opruge.

Važno uočiti: frekvencija titranja *ne ovisi* o amplitudi titranja čak ni za velike amplitude ako je opruga jako istegnuta.

1.2.3 Njihalo s dvije opruge

Promotrimo za kraj ovog potpoglavlja sustav prikazan na slici 1.8, koji se sastoji od tijela mase m zakačenog za dvije jednake opruge i jednu nit njihala. Ako su pomaci mali (a samo taj nas limes i zanima, jer su samo tada jednadžbe gibanja lagano rješive), tijelo se u ovakvom sustavu pomiče gotovo horizontalno, tj. longitudinalno u odnosu na opruge.



Slika 1.8: Njihalo s dvije opruge.

Ukupna sila koje uzrokuje gibanje jednaka je:

$$F = -mg\sin\theta - 2Ku \approx -mg\frac{u}{l} - 2Ku \quad .$$

Sila je linearna pomaku, pa je titranje ovog sistema harmonijsko i za njegovu vlastitu frekvenciju vrijedi:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{m} \quad .$$

U dobivenom su izrazu jasno odijeljeni doprinosi njihala i opruga! Dakako, vađenjem korijena gornji izraz gubi jednostavnu aditivnost i vlastita frekvencija općenito postaje netrivijalna funkcija i karakteristika opruga i karakteristika njihala.

Pogledajmo dva granična slučaja gornjeg sustava:
1) U limesu $g/l \gg 2K/m$ (opruge koje nisu "čvrste"), dodavanje opruga na njihalo tek malo povećava postojeću frekvenciju.
2) U suprotnom limesu, $g/l \ll 2K/m$, frekvencija titranja je posve određena oprugama, dok nit služi samo za to da pridržava tijelo iznad podloge (omogućuje gibanje bez trenja). Ovaj limes se može postići npr. povećavanjem duljine niti l.

Demonstracijski pokus 1.6: njihalo s dvije opruge.

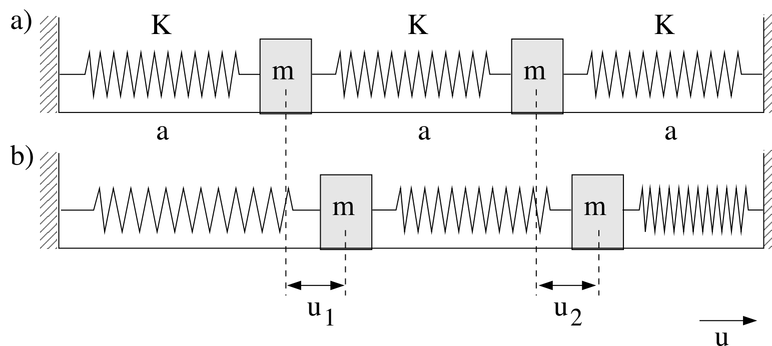
Važno uočiti: ulogu njihala, ulogu opruga.

Poopćenje sustava poput ovog sa slike 1.8 bit će nam jako važno u kasnijim razmatranjima sustava s velikim brojem tijela - opruge će nam tada predstavljati vezu među tijelima unutar sustava, dok ćemo njihalima opisivati vezanje sustava s okolinom.

1.3 Sustav s dva ili više jednakih tijela

1.3.1 Longitudinalno titranje sustava s dva jednaka tijela

Promotrimo sustav koji se sastoji od dva tijela jednakih masa (m), vezana međusobno i na statične zidove pomoću tri jednake opruge (konstanti K), kao na slici 1.9. Prvo ćemo razmotriti longitudinalne oscilacije unutar takvog sustava, a zatim provjeriti mijenja li se išta u slučaju transverzalnog titranja.



Slika 1.9: Sustav s dvije jednake čestice vezane oprugama; longitudinalno titranje.

Sistem je u ravnoteži na slici 1.9a; opruge tada imaju duljinu a koja je općenito različita od duljine nerastegnute opruge a_0 - u svakoj od opruga stoga postoji napetost jednaka $K(a{-}a_0)$, kao i u jednostavnijem primjeru obrađenom na str. 9. Jednadžbe gibanja sistema van ravnoteže (slika 1.9b) određene su samo pomacima tijela iz ravnoteže - zanima nas koliko se svaka od opruga produljila (ili skratila) u odnosu na ravnotežnu duljinu. Promotrimo prvo najljeviju oprugu: ako se prva masa pomaknula udesno za u_1, tada se ova opruga rastegnula za točno tu duljinu i napetost se u njoj promijenila za Ku_1 (i djeluje na masu prema lijevo, dakle u smjeru koji smo izabrali kao negativan smjer pomaka iz ravnoteže). Srednja opruga se zbog pozitivnog pomaka lijeve mase skratila, no zbog pomaka desne mase se produljila - netto-promjena njene duljine je stoga $u_2{-}u_1$, a odgovarajuća napetost djeluje na prvu masu prema desno, u pozitivnom smjeru u. Analogno razmatranje možemo napraviti za drugu masu, te za jednadžbe gibanja konačno dobiti:

$$m\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} = -Ku_1 + K(u_2 - u_1) = -2Ku_1 + Ku_2 \quad . \tag{1.4}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} = -Ku_2 + K(u_1 - u_2) = -2Ku_2 + Ku_1 \quad . \tag{1.5}$$

Dobili smo sistem dvije vezane linearne diferencijalne jednadžbe s dvije nepoznanice (u_1 i u_2). Do rješenja jednostavno možemo doći na razne načine, npr. zbrajajući i oduzimajući izraze 1.4 i 1.5, te uvodeći nove varijable.

Zbrajanjem jednadžbi 1.4 i 1.5 dobivamo:

$$m\frac{\mathrm{d}^2(u_1+u_2)}{\mathrm{d}t^2} = -K(u_1+u_2) \quad .$$

Uvedemo li novu varijablu:

$$u_I = u_1 + u_2 \quad ,$$

ovu jednadžbu trivijalno prepoznajemo kao jednadžbu harmonijskog oscilatora:

$$\frac{\mathrm{d}^2u_I}{\mathrm{d}t^2} + \frac{K}{m}u_I = 0 \quad .$$

Pripadajuća frekvencija je:

$$\omega_I^2 = \frac{K}{m} \quad .$$

Oduzimanjem izraza 1.4 i 1.5 dobivamo pak:

$$m\frac{\mathrm{d}^2(u_1 - u_2)}{\mathrm{d}t^2} = -3K(u_1 - u_2) \quad .$$

Uvedemo li novu varijablu:

$$u_{II} = u_1 - u_2 \quad ,$$

ova jednadžba postaje:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_{II}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3K}{m}u_{II} = 0 \quad .$$

što je jednadžba harmonijskog oscilatora frekvencije:

$$\omega_{II}^2 = \frac{3K}{m} \quad .$$

Veličine u_I i u_{II} u vremenu pokazuju jednostavnu sinusoidalnu ovisnost; opća rješenja su im stoga dana s:

$$u_I = A_I \sin\left(\omega_I t + \phi_I\right) \quad , \tag{1.6}$$

$$u_{II} = A_{II} \sin\left(\omega_{II} t + \phi_{II}\right) \quad , \tag{1.7}$$

gdje su A_I i A_{II} za sada neodređene amplitude, a ϕ_I i ϕ_{II} faze pojedinih rješenja.

Rješenja 1.6 i 1.7 opisuju tzv. **modove**[2] ili načine titranja - koriste se još i izrazi "normalni modovi" (*engl.* normal modes) ili "vlastiti modovi". Novouvedene zamjene u_I i u_{II} obično se nazivaju "normalnim koordinatama" danog sustava[3]. Kasnije ćemo pokazati da je svaka linearna kombinacija rješenja u_I i u_{II} također rješenje sistema diferencijalnih jednadžbi 1.4 i 1.5 - dakle, ovaj sistem se u vremenu može mijenjati i bitno kompliciranije od običnog harmonijskog titranja. *Općenito se titranje* **ne odvija** *jednom jedinom frekvencijom.* Posebnost vlastitih modova je upravo ta da kada sistem titra u jednom od njih (a amplituda drugoga je jednaka nuli), tada u njemu i ostaje, a titranje je jednostavno harmonijsko *jednom frekvencijom* (tj. oba tijela titraju istom frekvencijom).

Pogledajmo fizičku interpretaciju svakog od dva načina (moda) titranja. Titranje u "čistom" prvom modu dobit ćemo kada vrijedi $A_I \neq 0$ i $A_{II}=0$; tada imamo:

$$u_{II} = 0 = u_1 - u_2 \qquad \Rightarrow \qquad u_1 = u_2 \quad .$$

Dvije mase u ovom modu tiranja gibaju se zajedno, elongancija im je u svakom trenutku jednaka, tako da se razmak među njima ne mijenja u vremenu! Efektivno stoga imamo harmonijsko titranje centra mase sistema.

U drugom modu titranja ($A_I=0$ i $A_{II} \neq 0$), imamo pak:

$$u_I = 0 = u_1 + u_2 \qquad \Rightarrow \qquad u_1 = -u_2 \quad .$$

Dvije mase gibaju se protivno, a centar mase sistema pri tome miruje! Elongacije masa su istog iznosa, no u suprotnom smjeru.

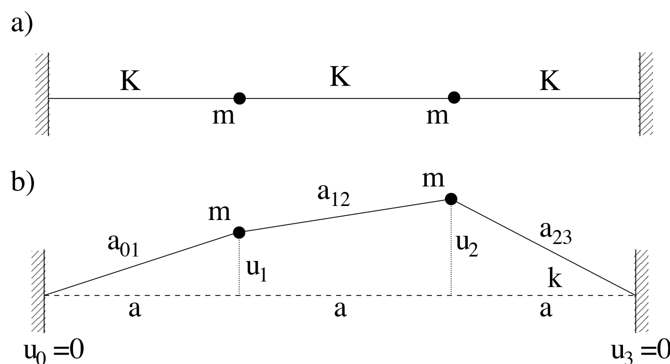
Zornije i detaljnije vizauliziranje ova dva moda titranja bit će dano u sljedećem poglavlju, nakon što obradimo transverzalno titranje istog sistema.

[2] *lat.* modus = način, režim.

[3] Pomalo zbunjujući izbor pridjeva "normalan" odnosi se na ortogonalnost koordinata, što će se detaljno raspraviti na kolegiju "Klasična mehanika".

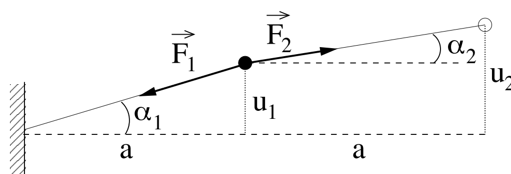
1.3.2 Transverzalno titranje sustava s dva jednaka tijela

Promotrimo isti sustav sa slike 1.9 (dvije povezane mase spojene oprugama za statičan zid), no ovaj ćemo put proučiti transverzalne oscilacije. U ravnoteži sustav izgleda isto kao prije, no sliku 1.9a sada ćemo pojednostaviti (radi lakšeg crtanja) utoliko što ćemo od sad nadalje opruge prikazivati kao ravne linije, kao na slici 1.10a. Kao i prije, pretpostavit ćemo i da tijela mase m imaju zanemarivo malenu dimenziju.



Slika 1.10: Sustav s dvije jednake čestice vezane oprugama; transverzalno titranje.

Na slici 1.10b prikazan je sustav otklonjen iz ravnoteže - otklone u_1 i u_2 smatrat ćemo pozitivnim ako su usmjereni prema gore u odnosu na ravnotežne položaje. Radi poopćenja koja ćemo napraviti u narednim poglavljima, i točkama u kojima su opruge fiksirane pridjeljujemo oznake u_0 i u_3 (koji u ovom primjeru, dakako, moraju biti jednaki nuli). S a_{01}, a_{12} i a_{23} redom su označene trenutačne duljine opruga.



Slika 1.11: Sile na lijevu masu sa slike 1.10b).

Promotrimo sile na prvu masu (slika 1.11). Duž (transverzalnog) smjera titranja povratna sila jednaka je:

$$F_{p1} = -F_1 \sin\alpha_1 + F_2 \sin\alpha_2 \quad . \tag{1.8}$$

Budući da vrijedi:

$$\sin\alpha_1 = \frac{u_1 - u_0}{a_{01}} \quad , \quad \sin\alpha_2 = \frac{u_2 - u_1}{a_{12}} \quad ,$$

te:

$$F_1 = K\left(a_{01} - a_0\right) \quad , \quad F_1 = K\left(a_{12} - a_0\right) \quad ,$$

dobivamo:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}t^2} = -K\left(a_{01} - a_0\right) \cdot \frac{u_1 - u_0}{a_{01}} + K\left(a_{12} - a_0\right) \cdot \frac{u_2 - u_1}{a_{12}} \quad .$$

Veličine a_{ij} su razmaci između i-te i j-te mase (vidi sliku 1.10b) i za njih općenito vrijedi:

$$a_{ij} = \sqrt{a^2 + \left(u_j - u_i\right)^2} \quad .$$

Kao i u prije razmatranom jednostavnijem slučaju transverzalnih oscilacija (str. 11), ovu jednadžbu možemo linearizirati ili u slučaju vrlo malenih oscilacija ili u slučaju kada su opruge jako istegnute. Pogledajmo npr. drugi spomenuti slučaj ("slinky"-aproksimaciju) - u tom je limesu veličina a_0 u zagradama gornjeg izraza zanemarivo malena, pa se zagrade krate s nazivnikom razlomka:

$$m\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} = -K\left(u_1 - u_0\right) + K\left(u_2 - u_1\right) = -K\left(2u_1 - u_2 - u_0\right) \quad . \tag{1.9}$$

Analogno se za drugu (desnu) masu dobiva:

$$m\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} = -K\left(u_2 - u_1\right) + K\left(u_3 - u_2\right) = -K\left(2u_2 - u_3 - u_1\right) \quad . \tag{1.10}$$

Uvrstimo li u_0=u_3=0 (što za sada nismo uvrštavali samo zato da bismo kasnije lakše poopćili ove jednadžbe na slučaj s puno tijela), dobivamo jednadžbe koje su formalno posve jednake jednadžbama 1.4 i 1.5 dobivenim za longitudinalni slučaj:

$$m\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} = -K\left(2u_1 - u_2\right) \quad ,$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} = -K\left(2u_2 - u_1\right) \quad .$$

Identične jednadžbe imaju i identična rješenja: kao i u longitudinalnom slučaju, imamo dakle dva načina (moda) titranja. Odgovarajuće diferencijalne jednadžbe harmonijskog oscilatora dobivamo uz zamjene u_I=u_1+u_2 i u_{II}=u_1−u_2. Pogledajmo detaljnije svaki od dva moda.

I) Čisti mod titranja I dobit ćemo kada je u_{II}=0, tj. $u_1(t)$=$u_2(t)$. Tada je u svakom trenutku pomak druge čestice jednak pomaku prve čestice. Frekvencija ovog načina titranja je:

$$\omega_I = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad .$$

Ovaj način titranja ilustriran je na slici 1.12a. Gibanje je pojedinih čestica jednostavno harmonijsko:

$$u_1(t) = \frac{A_I}{2}\sin\left(\omega_I t + \phi_I\right) \quad ,$$

$$u_2(t) = \frac{A_I}{2}\sin\left(\omega_I t + \phi_I\right) \quad ,$$

a frekvencije, amplitude i faze titranja su iste za obje čestice (faktor 2 u nazivniku nužan je da sumiranjem dobijemo relaciju 1.6).

II) Čisti mod titranja II dobit ćemo kada je u_I=0, tj. $u_1(t)$=−$u_2(t)$. Tada je u svakom trenutku pomak druge čestice jednak po iznosu pomaku prve čestice, no suprotnog smjera. Frekvencija ovog načina titranja je:

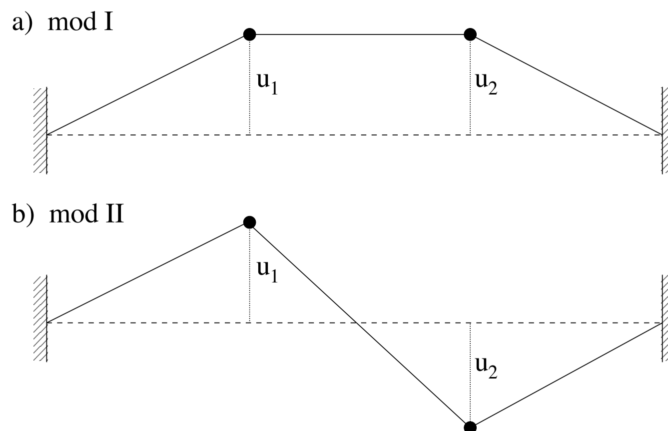
$$\omega_{II} = \sqrt{\frac{3K}{m}} \quad .$$

Ovaj način titranja ilustriran je na slici 1.12b). Gibanje svake pojedine čestice je opet harmonijsko:

$$u_1(t) = \frac{A_{II}}{2}\sin\left(\omega_{II} t + \phi_{II}\right) \quad , \tag{1.11}$$

$$u_2(t) = -\frac{A_{II}}{2}\sin\left(\omega_{II} t + \phi_{II}\right) = \frac{A_{II}}{2}\sin\left(\omega_{II} t + \phi_{II} - \pi\right) \quad . \tag{1.12}$$

Frekvencije i amplitude titranja su (kao i kod prvog moda) iste za obje čestice (faktor 2 u nazivniku nužan je da sumiranjem dobijemo relaciju 1.7). Striktno govoreći faze titranja čestica u drugom



Slika 1.12: Načini transverzalnog titranja sustava s dvije jednake čestice vezanog oprugama.

modu razlikuju se za π - standardno se kaže da su čestice u *"protufazi"*[4].

Osim titranja u nekom od vlastitih modova, moguće je i transverzalno titranje koje bi bilo kombinacija dva moda titranja (dakle, titranje za koje ni u_I ni u_{II} nije jednako nuli) - takvo će posve općenito titranje biti detaljno diskutirano kasnije, u drugom poglavlju.

Zadržat ćemo se još na ovom jednostavnom primjeru da bismo diskutirali par daljnjih zanimljivih pojava. Pokažimo prvo da smo smjeli odvojiti longitudinalne od transverzalnih oscilacija, tj. da se u slučaju transverzalnih pomaka *ne pojavljuju* longitudinalne sile ni u sustavu s dva tijela. Iskoristit ćemo opet sliku 1.11 i izračunati silu na prvu masu u longitudinalnom smjeru (usporedite s jednadžbom 1.8):

$$F_{l1} = -F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 = -K\left(a_{01} - a_0\right)\frac{a}{a_{01}} + K\left(a_{02} - a_0\right)\frac{a}{a_{02}} \quad .$$

U aproksimaciji jako istegnutih opruga u ovom izrazu zanemarujemo a_0 u usporedbi s duljinama rastegnutih opruga, pa dobivamo:

$$F_{l1} \approx -Ka_{01}\frac{a}{a_{01}} + Ka_{02}\frac{a}{a_{02}} = -Ka + Ka = 0 \quad .$$

Dakle, ako ovakav sistem inicijalno pobudimo na transverzalne oscilacije, sve longitudinalne sile će se poništiti i sistem će u vremenu nastaviti oscilirati transverzalno.

Demonstracijski pokus 1.7: mase povezane oprugama, longitudinalne i transverzalne oscilacije.

Važno uočiti: utjecaj početnih uvjeta na način osciliranja; dva moda titranja; frekvencije pojedinih modova.

Diskutirajmo na primjeru transverzalnog titranja u sustavu dvije mase i tri opruge još nekoliko zanimljivih opažanja, te uvedimo vrlo važan koncept koji će nam se protezati kroz čitav kolegij:

[4] *engl.* antiphase.

prostorni oblik pojedinog moda i odgovarajuću valnu duljinu. No promotrimo za početak frekvencije modova, te ponašanje energije u njima.

Usporedba frekvencija ω_I i ω_{II}

Računom je za dva načina titranja pokazano da vrijedi:

$$\omega_I < \omega_{II} \quad ;$$

postavlja se pitanje koji je fizički razlog za ovu pojavu. Razlog je, dakako, taj da je povratna sila u drugom slučaju veća nego u prvom. Naime, u prvom slučaju na svaku od masa povratnu silu izaziva samo opruga koja tu masu spaja s zidom - opruga između dva tijela u vremenu ne mijenja duljinu (duljina je uvijek jednaka a), a ne mijenja ni smjer pružanja (koji je uvijek paralelan originalnom). Dakle, frekvencija ω_I posljedica je povratne sile koju izaziva samo jedna opruga. Za razliku od toga, za frekvenciju ω_{II} drugog načina titranja "odgovorne" su obje opruge vezane za svaku od masa - i opruga koja spaja dva tijela tijekom vremena mijenja duljinu i smjer. Budući da je frekvencija titranja veća kada je i povratna sila veća, pri drugom načinu titranja dobiva se veća frekvencija.

Energija titranja

Već smo se prisjetili da su pri jednostavnom harmonijskom titranju (kakvog npr. vrši masa na opruzi) kinetička i potencijalna energija u prosjeku jednake. U složenom sustavu s dvije čestice, u svakom od dvaju modova titranja obje čestice se nalaze u svojim amplitudnim položajima kada je potencijalna energija ($1/2Ku^2$) maksimalna, a kinetička energija iščezava. Također, obje čestice istodobno prolaze kroz položaj ravnoteže - tada potencijalna energija za svaku od njih iščezava, dok je kinetička maksimalna. Bez dokaza (za sada) ćemo poopćiti: *vlastiti mod (način) titranja kolektivno je gibanje u kojem se ukupna potencijalna energija u cijelosti pretvara u ukupnu kinetičku energiju i obrnuto.*

Prostorni oblik moda

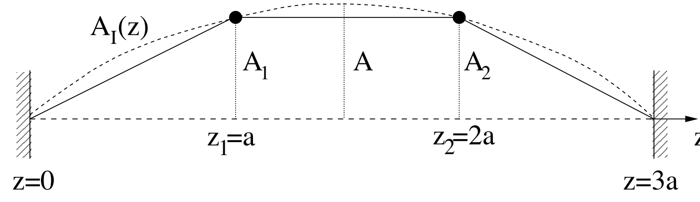
Razmotrimo položaje čestica u trenutku kada su dosegnuti maksimalni otkloni (tj. amplitude). Postavimo koordinatni sustav tako da je os z duž smjera opruga i čestica u položaju ravnoteže; ishodište postavljamo na mjesto lijevog zida (u točku u kojoj je fiksirana prva opruga). Prva čestica ima tada koordinatu duž te osi jednaku: z_1=a, a druga z_2=$2a$.

Maksimalni otkloni (amplitude) čestica okomito na os z jednaki su A_1 i A_2 (općenitosti radi pretpostavimo da su ove amplitude različite). Cilj nam je zapisati te amplitude kao funkcije koordinate duž osi z - taj ćemo rezultat koristiti u kasnijim poopćenjima na veće sustave. Za prvi mod titranja, to činimo na sljedeći način:

$$A_I(z) = A\sin\left(\pi\frac{z}{L}\right) \quad , \tag{1.13}$$

gdje je L ukupna duljina između dva zida (u ovom slučaju, dakle, L=$3a$). $A_I(z)$ je *amplituda titranja čestica* sustava (u modu I) na mjestu z, dok ćemo veličinu A nazvati *amplitudom moda* (da ne bi bilo zabune, ona nije jednaka amplitudi titranja normalnih koordinata u izrazima 1.6 i 1.7). Zapisana funkcija jednaka je nuli za z=0 (lijevi čvrsti kraj) i z=L (desni čvrsti kraj), kao što i mora biti iz postavljenih rubnih uvjeta na sustav. Dakako, opruge se kod rastezanja u našem idealiziranom scenariju ne savijaju; dakle, iako je $A_I(z)$ zaobljena kao sinusoida ona nam daje samo amplitude tijela na različitim lokacijama, ali ne i izgled samih opruga.

Funkcija $A_I(z)$ predstavlja, dakle, *zamišljenu* krivulju (crtkana linija na slici 1.13) na kojoj se nalaze čestice u trenutku maksimalnog otklona iz položaja ravnoteže pri titranju u prvom modu. Svaki od modova titranja složenog sustava ima, dakle, neki svoj prostorni oblik - taj koncept nije



Slika 1.13: Amplituda titranja kao funkcija položaja za vlastiti mod I.

nam trebao pri razmatranju jednostavnih harmonijskih oscilatora (gdje je titralo samo jedno tijelo). Ako je zadana amplituda moda A, onda znamo i amplitude pojedinih čestica. Amplitude čestica u nekom modu možemo, dakle, zapisati ili kao funkciju prostorne koordinate u smjeru pružanja sustava (taj zapis dan je u izrazu 1.13) ili eksplicitno za svaku od čestica, pomoću odgovarajućeg indeksa (u našem slučaju i):

$$A_{I,i} = A \sin\left(\pi \frac{z_i}{L}\right) \quad , \quad i = 1, 2 \quad , \tag{1.14}$$

gdje je L ukupni razmak (L=3a), a z_i z-koordinata i-te čestice. Npr. za prvu česticu (i=1) imamo z_1=a, pa je njena amplituda:

$$A_{I,1} = A \sin\left(\pi \frac{a}{L}\right) = A \sin\left(\pi \frac{a}{3a}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} A \quad .$$

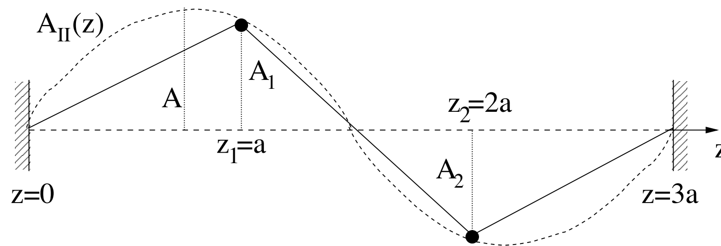
Za drugu česticu (i=2) imamo z_2=2a i:

$$A_{I,2} = A \sin\left(\pi \frac{2a}{L}\right) = A \sin\left(\pi \frac{2a}{3a}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} A \quad .$$

Valnu duljinu moda definiramo kao period funkcije oblika moda $A(z)$; za prvi mod I razmak L između dva čvrsta kraja (tj. zida, odnosno točaka u kojima su fiksirane opruge) jednak je polovici valne duljine, tj.:

$$L = \frac{\lambda_I}{2} \quad ,$$

gdje je λ_I valna duljina prvog moda.



Slika 1.14: Amplituda titranja kao funkcija položaja za vlastiti mod II.

Razmotrimo sada drugi mod, shematski prikazan na slici 1.14. Prostorni oblik drugog moda dan je funkcijom:

$$A_{II}(z) = A \sin\left(2\pi \frac{z}{L}\right) \quad . \tag{1.15}$$

Amplitude pojedinih čestica dobivamo uvrštavajući njihove koordinate z:

$$A_{II,1} = A \sin\left(2\pi \frac{a}{L}\right) = A \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} A \quad .$$

Za drugu česticu (i=2) imamo z_2=2a i:

$$A_{II,2} = A\sin\left(2\pi\frac{2a}{L}\right) = A\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}A \quad .$$

Dakako, striktno govoreći *amplituda ne može biti negativna* - minus u dobivenom izrazu govori nam samo to da je druga čestica u protufazi prvoj (vidi npr. izraze 1.11 i 1.12). Slobodu da amplituda na taj način poprima i negativne vrijednosti dozvolit ćemo se i u nastavku kolegija.

Sa slike 1.14 očito je da se u drugom modu između dva čvrsta kraja prostire cijela valna duljina, tj. da vrijedi:

$$L = \lambda_{II} \quad ,$$

gdje je λ_{II} valna duljina drugog moda. Vidimo da je valna duljina višeg moda manja ($\lambda_{II}<\lambda_I$). U nastavku poglavlja promotrit ćemo se što se dešava sa svim diskutiranim veličinama (frekvencijom, valnom duljinom itd.) povećavamo li broj čestica u sustavu.

1.3.3 Transverzalno titranje sustava s više jednakih tijela

U ovom ćemo poglavlju poopćiti razmatranje iz prethodnog poglavlja na sisteme s više (jednakih) čestica. Razmotrimo najprije sustav koji se sastoji od tri čestice. Slijedimo li logiku iz prethodnog poglavlja, očekujemo sistem od tri diferencijalne jednadžbe (za tri tijela), što vodi na tri moda titranja s tri različite valne duljine i frekvencije. Iz praktičnih razloga, modove titranja od sada nadalje označavat ćemo arapskim brojem u zagradi, (n), pa ćemo tako npr. valne duljine označavati s $\lambda^{(n)}$. Modovi će, kao i do sada, biti poredani od onih s najvećom valnom duljinom k onima s najmanjom. Na temelju zaključaka iz prošlog potpoglavlja, u n-tom modu očekujemo naći n puta po pola valne duljine između dva čvrsta kraja:

$$L = n\frac{\lambda^{(n)}}{2} \quad , \quad n = 1, 2, 3. \tag{1.16}$$

Ovo ćemo kasnije i eksplicitno dokazati za sustav od N čestica, za sada samo želimo ilustrirati modove u kompliciranijim sustavima. Modovi titranja sustava s tri tijela prikazani su na slici 1.15.

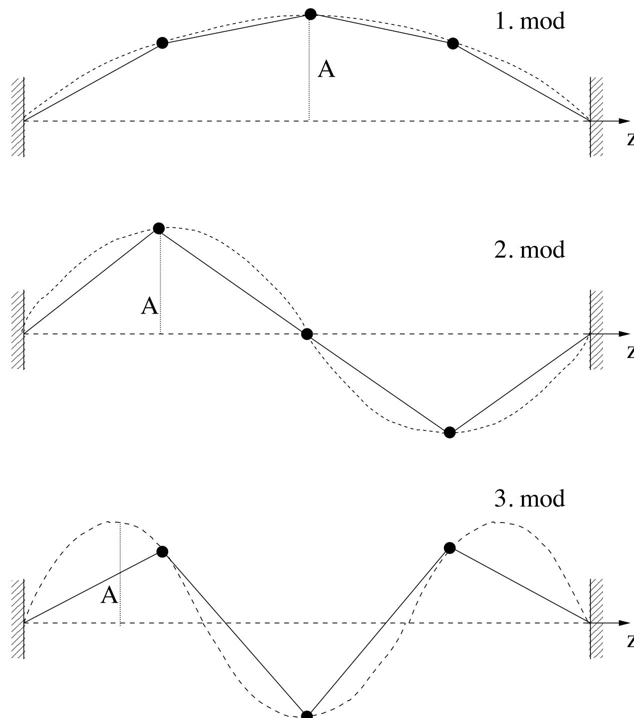
Prvi mod je najjednostavniji: sve tri čestice se gibaju u istom smjeru, no različitim amplitudama (što ćemo objasniti u nastavku). U drugom modu srednja čestica miruje, a prva i treća se gibaju u suprotnim smjerovima. U trećem modu srednja čestica ima veću amplitudu od ostalih i giba se u suprotnom smjeru od njih. Za vlastite frekvencije titranja na temelju razmatranja povratnih sila na čestice u svakom od modova očekujemo:

$$\omega^{(1)} < \omega^{(2)} < \omega^{(3)} \quad .$$

U nastavku poglavlja ovo ćemo i eksplicitno dokazati.

Demonstracijski pokus 1.8: načini (modovi) titranja u sustavu s tri jednake čestice vezane oprugama.

Važno uočiti: prepoznati svaki od tri moda titranja; u svakom modu uočiti amplitude tiranja svake od čestica; usporediti vlastite frekvencije titranja svakog moda.



Slika 1.15: Vlastiti modovi titranja sistema s tri čestice.

Kao i u slučaju sustava s dvije čestice, funkcije oblika moda (crtkane linije na slici 1.15) dane su s:

$$A^{(n)}(z) = A \sin\left(n\pi \frac{z}{L}\right) \quad .$$

Mijenjanjem z od 0 do L, argument sinusne funkcije se promijeni za $n\pi$, tj. n puta po pola perioda, kao što smo zaključili već i prije u relaciji 1.16. Iskoristimo li tu relaciju da iz funkcije oblika moda "izbacimo" L, dobit ćemo:

$$A^{(n)}(z) = A \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda^{(n)}}\right) \quad . \tag{1.17}$$

Dakako, ako se prostorna koordinata z mijenja od 0 do $\lambda^{(n)}$, argument sinusne funkcije mijenja se za puni period (2π).

Prostorni oblik moda u sustavu N jednakih čestica

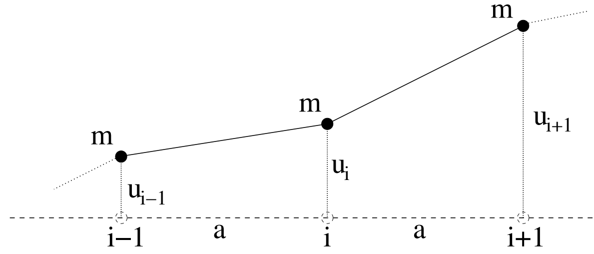
U prethodnom tekstu pretpostavili smo (poopćenjem s jednostavnih sustava i u skladu s opažanjima tijekom demonstracijskih pokusa) da je funkcija prostornog oblika moda dana izrazom 1.16; sada ćemo pokazati da je ta pretpostavka (i njene posljedice) konzistentna s dinamikom problema, i to na posve općenitom sustavu od N jednakih čestica vezanih oprugama.

Pogledajmo i-tu česticu sistema (od njih N) u nekom od mogućih modova titranja (npr. n-tom). Na to tijelo silom djeluju opruge (slika 1.16) koje ga spajaju s tijelom na poziciji i-1, te tijelom na poziciji i+1; drugi Newtonov zakon za to tijelo stoga postaje (u analogiji s izrazima 1.9 i 1.10):

$$m\frac{\mathrm{d}^2 u_i}{\mathrm{d}t^2} = -K\left(u_i - u_{i-1}\right) + K\left(-u_i + u_{i+1}\right) \quad . \tag{1.18}$$

Uvrstimo li:

$$u_i = A_i \sin\left(\omega^{(n)} t + \phi\right) \quad , \tag{1.19}$$



Slika 1.16: Uz izvod jednadžbe gibanja i-te mase u sustavu N tijela povezanih oprugama.

nakon kraćenja sa sinusnom funkcijom dobivamo:

$$-mA_i\left(\omega^{(n)}\right)^2 = K\left(-A_i + A_{i-1}\right) + K\left(-A_i + A_{i+1}\right) \quad ,$$

odnosno:

$$\left(\omega^{(n)}\right)^2 = K\frac{2A_i - A_{i-1} - A_{i+1}}{mA_i} = \frac{K}{m}\left(2 - \frac{A_{i-1} + A_{i+1}}{A_i}\right) \quad . \tag{1.20}$$

Budući da je mod kolektivno titranje svih čestica *istom frekvencijom*, ovaj izraz mora nam dati isti $\omega^{(n)}$ neovisno o izabranom i. Nadalje, ta veličina mora biti konstantna u vremenu jer je frekvencija titranja u nekom modu stalna.

Ako je pretpostavljena funkcija oblika moda 1.17 ispravna, onda se amplitude pojedinih čestica dobivaju uvrštavanjem njihovih koordinata duž osi z:

$$A_i = A\sin\left(2\pi\frac{z_i}{\lambda^{(n)}}\right) = A\sin\left(2\pi\frac{ia}{\lambda^{(n)}}\right) \quad ,$$

$$A_{i\pm1} = A\sin\left(2\pi\frac{z_{i\pm1}}{\lambda^{(n)}}\right) = A\sin\left(2\pi\frac{(i\pm1)a}{\lambda^{(n)}}\right) = A\sin\left(2\pi\frac{ia}{\lambda^{(n)}} \pm 2\pi\frac{a}{\lambda^{(n)}}\right) \quad .$$

Ovaj potonji izraz možemo transformirati iskoristimo li trigonometrijsku relaciju za sinus sume (odnosno razlike):

$$\sin\left(\alpha \pm \beta\right) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad ;$$

dobivamo:

$$A_{i\pm1} = A\left[\sin\left(2\pi\frac{ia}{\lambda^{(n)}}\right)\cos\left(2\pi\frac{a}{\lambda^{(n)}}\right) \pm \cos\left(2\pi\frac{ia}{\lambda^{(n)}}\right)\sin\left(2\pi\frac{a}{\lambda^{(n)}}\right)\right] \quad .$$

Cilj nam je izračunati $\omega^{(n)}$ i pokazati da je ona neovisna o indeksu i (rednom broju tijela u sustavu). Krećemo od jednadžbe 1.20; uvrstimo li u nju gore dobivene izraze za A_i, A_{i+1} i A_{i-1}, dobivamo najprije međurezultat:

$$A_{i-1} + A_{i+1} = 2A\sin\left(2\pi\frac{ia}{\lambda^{(n)}}\right)\cos\left(2\pi\frac{a}{\lambda^{(n)}}\right) = 2A_i\cos\left(2\pi\frac{a}{\lambda^{(n)}}\right) \quad ,$$

a pomoću toga i:

$$\left(\omega^{(n)}\right)^2 = \frac{2K}{m}\left[1 - \cos\left(2\pi\frac{a}{\lambda^{(n)}}\right)\right] \quad .$$

U ovom izrazu nema ovisnost o indeksu i - rezultat je jednak neovisno za koje tijelo sustava smo proveli račun. Time smo dokazali da iz pretpostavljene funkcije oblika moda slijede takvi odnosi amplituda pojedinih čestica da sve čestice titraju istom frekvencijom - izraz 1.17 možemo stoga smatrati točnim.

Ujedno smo dobili izraz za praktično izračunavanje frekvencija pojedinih modova znamo li njihovu valnu duljin. Iskoristimo li drugu trigonometrijsku relaciju[5]:

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad ,$$

dobivamo konačno tzv. **disperzijsku relaciju** promatranog sustava:

$$\omega^{(n)} = \sqrt{\frac{4K}{m}}\sin\frac{\pi a}{\lambda^{(n)}} \quad . \tag{1.21}$$

Disperzijska relacija pokazuje ovisnost *frekvencije o valnoj duljini* danog moda titranja.

Pogledajmo detaljnije dobiven izraz za disperzijsku relaciju. Za općenit sustav od N čestica međusobno razmaknutih za jednaku udaljenost a imamo:

$$L = (N+1)a \quad ,$$

Za n-ti mod u tom sustavu vrijedi 1.16:

$$L = n\frac{\lambda^{(n)}}{2}$$

pa izjednačavanjem s prethodnom jednadžbom dobivamo:

$$n\frac{\lambda^{(n)}}{2} = (N+1)a \quad .$$

Odavdje argument u sinusnoj funkciji disperzijske relacije postaje:

$$\frac{\pi a}{\lambda^{(n)}} = \frac{n}{N+1}\cdot\frac{\pi}{2} \quad .$$

Kada je N jako velik, za ekstremne (rubne) modove dobivamo:
- n=1 (prvi mod):

$$\frac{\pi a}{\lambda^{(1)}} = \frac{1}{N+1}\cdot\frac{\pi}{2} \to 0 \quad ;$$

- n=N (najviši mod):

$$\frac{\pi a}{\lambda^{(N)}} = \frac{N}{N+1}\cdot\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2} \quad .$$

Dakle, $\pi a/\lambda^{(N)}$ (argument u sinusnoj funkciji disperzijske relacije) poprima vrijednosti samo između 0 i $\pi/2$.

Disperzijska relacija 1.21 vrijedi za bilo koji ukupni broj čestica N, pa čak i za N=1 (sistem sa samo jednom česticom). U tom limesu imamo samo jedan mod, n=1, za koji tada vrijedi:

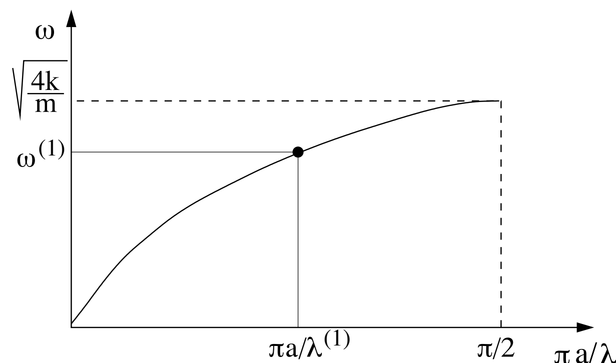
$$\frac{\pi a}{\lambda^{(1)}} = \frac{1}{1+1}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \quad .$$

Za frekvenciju dobivamo:

$$\omega^{(1)} = \sqrt{\frac{4K}{m}}\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{4K}{m}}\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{2K}{m}} \quad ;$$

to je upravo frekvencija ω_0 sa str. 10.

[5]Bronštejn *et al.*, str. 83.



Slika 1.17: Sistem s jednom česticom: kontinuirana krivulja odgovara disperzijskoj relaciji (izraz 1.21), dok podebljana točka prikazuje frekvenciju i valnu duljinu jedinog moda titranja.

Dobivenu valnu duljinu i frekvenciju možemo prikazati na krivulji disperzijske relacije kao točku čije koordinate odgovaraju gore dobivenim vrijednostima - to je za sustav od samo jedne čestice učinjeno na slici 1.17. Ponavljanjem ove procedure za sisteme sa sve više čestica uočit ćemo pravilnosti koje se pojavljuju, i na temelju njih ekstrapolirati ponašanje sustava na vrlo velik broj čestica ("kontinuum").

Za sustav s dvije čestice $\underline{N=2}$ moguća su dva moda:
- n=1 (prvi mod):

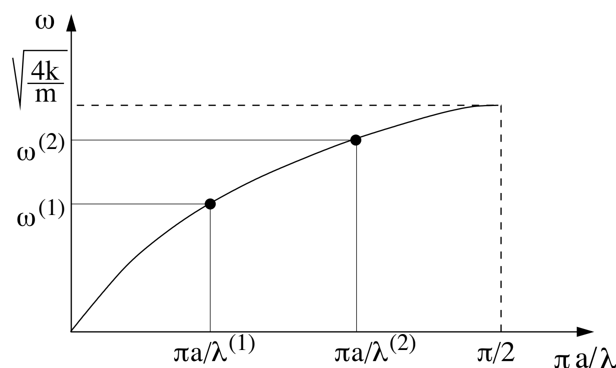
$$\frac{\pi a}{\lambda^{(1)}} = \frac{1}{2+1} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \quad ,$$

$$\omega^{(1)} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad ;$$

- n=2 (drugi mod):

$$\frac{\pi a}{\lambda^{(2)}} = \frac{2}{2+1} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \quad .$$

$$\omega^{(2)} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{3K}{m}} \quad .$$



Slika 1.18: Isto kao i slika 1.17, samo za sistem s dvije čestice.

Frekvencije i valne duljine ova dva moda titranja sistema s dvije čestice ucrtane su na disperzijsku krivulju na slici 1.18. U pitanju su, dakako, upravo one frekvencije koje smo dobili u uvodnom

razmatranju započetom na str. 16.

Sličnom se procedurom za sustav s proizvoljnim brojem čestica dobivaju vlastite frekvencije i valne duljine za koje općenito vrijedi:
(1) Vrijednosti $\pi a/\lambda^{(n)}$ su na grafovima poput slika 1.17 i 1.18 ekvidistantne, no frekvencije $\omega^{(n)}$ nisu zbog nelinearnosti disperzijske krivulje;
(2) Za dane parametre K i m postoji maksimalna frekvencija:

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \quad ,$$

tj. sustav nikada ne može titrati višom frekvencijom. Ove dvije tvrdnje vrijede za sustav proizvoljnog, no konačnog broja tijela. Pogledajmo za kraj prvog poglavlja što se dešava kada broj tijela postane ekstremno velik.

1.4 Aproksimacija kontinuuma

Neka je N (broj čestica u sustavu) vrlo velik. Kod nižih modova titranja ($n \ll N$) tada se mnoštvo čestica nalazi unutar udaljenosti koja odgovara jednoj valnoj duljini $\lambda^{(n)}$ - ponašanje susjednih čestica stoga je vrlo slično i elongacije se skoro pa kontinuirano mijenjaju duž sistema. Sustav se tada u prvoj aproksimaciji ponaša poput **kontinuuma**, odnosno medija u kojem možemo zanemariti zrnatost (tj. nehomogenost). Pogledajmo detaljno ponašanje takvog sustava (tj. sustava pobuđenog u mod za koji vrijedi $n \ll N$).

Neka se niz masa m nalazi na udaljenosti a jedna od druge - tada je linijska gustoća mase (tj. masa po jedinici duljine sustava) dana s:

$$\rho = \frac{m}{a} \quad . \tag{1.22}$$

Da bi aproksimacija kontinuuma dala dobar opis sustava, mora vijediti da se unutar jedne valne duljine moda nalazi puno čestica, tj. $\lambda^{(n)} \gg a$.

U ravnotežnom je stanju svaka opruga jednako rastegnuta, pa u njima postoji sila napetosti T dana s:

$$T = K\left(a - a_0\right) = Ka\left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \quad .$$

U limesu jako rastegnutih opruga (aproksimacija čvrstih opruga, odnosno "slinky"-aproksimacija sa str. 12), razlomak u ovoj zagradi postaje zanemarivo malen, pa dobivamo jednostavno:

$$T = Ka \quad . \tag{1.23}$$

Pogledajmo u što se transformira disperzijska relacija (izraz 1.21) u aproksimaciji kontinuuma. Budući da tada vrijedi $n \ll N$, za valnu duljinu dobivamo:

$$\frac{\pi a}{\lambda^{(n)}} = \frac{n}{N+1} \cdot \frac{\pi}{2} \ll 1 \quad ,$$

pa odavdje slijedi:

$$\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda^{(n)}}\right) \approx \frac{\pi a}{\lambda^{(n)}} \quad .$$

Uvrštavanjem u disperzijsku relaciju (izraz 1.21), za vlastitu frekvenciju n-tog moda titranja dobivamo tada:

$$\omega^{(n)} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \cdot \frac{\pi a}{\lambda^{(n)}} = \sqrt{\frac{Ka}{m/a}} \cdot \frac{2\pi}{\lambda^{(n)}} \quad ,$$

brojnik razlomka ispod korijena prepoznajemo kao napetost T, a nazivnik kao linijsku gustoću ρ, pa konačno dobivamo:

$$\omega^{(n)} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \cdot \frac{2\pi}{\lambda^{(n)}} \quad . \tag{1.24}$$

U ovom limesu ($\lambda^{(n)} \gg a$) dobivena je, dakle, linearna ovisnost između vlastite frekvencije ω i inverza valne duljine $1/\lambda$ - na slikama 1.17 i 1.18 takva ovisnost odgovarala bi pravcu koji bi bio tangenta na disperzijsku krivulju u ishodištu (tj. za modove velikih valnih duljina).

Demonstracijski pokus 1.9: niži modovi titranja u velikoj opruzi i gumenoj cijevi.

Važno uočiti: vezu frekvencije i valne duljine moda.

Za koje je sustave aproksimacija kontinuuma relevantna? U principu, svaka elastična nit praktički predstavlja kontinuiranu masu i kontinuiranu elastičnost. Dakako, savršen, apsolutan kontinuum ne postoji - bilo koji materijal na dovoljno malim dimenzijama sadrži zrnatu strukturu (npr. atome razmaknute za udaljenost a). Gornja aproksimacija za neki materijal prestat će vrijediti kada valna duljina $\lambda^{(n)}$ (za visoke modove titranja) postane usporediva s udaljenošću a.

1.4.1 Valna jednadžba u aproksimaciji kontinuuma

Pokažimo sada da na temelju dosadašnjih razmatranja u ovom poglavlju lagano dolazimo do valne jednadžbe za kontinuum. Iako ćemo se s putujućim valovima kao konceptom početi baviti tek u četvrtom poglavlju, izvod valne jednadžbe već u ovom trenutku daje nam kompletniji uvid u kontinuum kao takav. Krenimo od jednadžbe gibanja za i-tu česticu u nizu, u sustavu koji se sastoji od vrlo velikog broja čestica - ista je dana izrazom 1.18:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 u_i}{\mathrm{d}t^2} = -K\left(u_i - u_{i-1}\right) - K\left(u_i - u_{i+1}\right) \quad .$$

U aproksimaciji kontinuuma pomaci iz položaja ravnoteže susjednih čestica međusobno se razlikuju za vrlo malenu vrijednost - u graničnom slučaju ima smisla shvatiti pomake u kao kontinuiranu funkciju položaja na osi z, tj. kao $u(z)$. Da bi formalno odradili prijelaz u taj limes, napišimo jednadžbu gibanja za i-tu česticu ovako:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 u_i}{\mathrm{d}t^2} = Ka^2 \cdot \frac{1}{a}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{a} - \frac{u_i - u_{i-1}}{a}\right) \quad . \tag{1.25}$$

Zatim uvodimo zamjene:

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{a} \longrightarrow \left(\frac{\Delta u}{\Delta z}\right)_{i+1,i} \quad ,$$

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{a} \longrightarrow \left(\frac{\Delta u}{\Delta z}\right)_{i,i-1} \quad .$$

Dakako, u limesu malih udaljenosti a omjere na desnim stranama gornjih jednakosti možemo zamijeniti derivacijama. No, derivacija u prvom izrazu (desno od i-te čestice) nije nužno jednaka derivaciji u drugom (lijevo od i-te čestice) - one se međusobno razlikuju jer može postojati zakrivljenost funkcije $u(z)$, odnosno njena druga derivacija može biti različita od nule. Za $a \to 0$ imamo, dakle:

$$\frac{1}{a}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{a} - \frac{u_i - u_{i-1}}{a}\right) \longrightarrow \frac{1}{a}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta z}\right)_{i+1,i} - \left(\frac{\Delta u}{\Delta z}\right)_{i,i-1}\right] \longrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2}\right)_i \quad .$$

I u ostatak jednadžbe 1.25 uvodimo parametre kontinuuma:

$$\frac{Ka^2}{m} = \frac{Ka}{m/a} \quad ,$$

što po izrazima 1.22 i 1.23 u limesu $a \to 0$ postaje:

$$\frac{Ka^2}{m} = \frac{Ka}{m/a} \longrightarrow \frac{T}{\rho} \quad .$$

Nadalje, budući da izraz 1.25 mora vrijediti za svaku česticu, nakon prelaska na derivaciju i parametre kontinuuma možemo ispustiti indeks i, pa konačno dobivamo:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} \quad . \tag{1.26}$$

Ovo prepoznajemo kao valnu jednadžbu (uvedenu na "Općoj fizici 1") - konkretno, ovo je **valna jednadžba za kontinuum**, odnosno materijal kod kojeg možemo zanemariti zrnatu strukturu. U gornjem shematskom izvodu, zanemarili smo činjenicu da je otklon od položaja ravnoteže u funkcija dvije nezavisne varijable, $u(z,t)$, pa bi zapravo ispravnije bilo pisati parcijalne derivacije umjesto običnih. U četvrtom ćemo poglavlju ovo dodatno razjasniti.

Kako izgledaju modovi titranja kontinuuma? Kontinuum smo dobili kao aproksimaciju za gust zrnat sustav. Prema tome, možemo očekivati iste modove, ali kao kontinuirane funkcije parametra z. Za n-ti mod stoga očekujemo ovakvo ponašanje u vremenu:

$$u^{(n)}(z,t) = A^{(n)}(z)\sin\left(\omega^{(n)}t\right) \quad , \tag{1.27}$$

a za oblik moda:

$$A^{(n)}(z) = A\sin\left(2\pi\frac{z}{\lambda^{(n)}}\right) \quad .$$

Uvrštavanjem u valnu jednadžbu kontinuuma, izraz 1.26, provjeravamo ispravnost našeg očekivanja:

$$-\left(\omega^{(n)}\right)^2 A\sin\left(2\pi\frac{z}{\lambda^{(n)}}\right)\sin\left(\omega^{(n)}t\right) = -\frac{T}{\rho}\left(2\pi\frac{1}{\lambda^{(n)}}\right)^2 A\sin\left(2\pi\frac{z}{\lambda^{(n)}}\right)\sin\left(\omega^{(n)}t\right) \quad .$$

Ova jednadžba će biti zadovoljena ako je ispunjeno:

$$\left(\omega^{(n)}\right)^2 = \frac{T}{\rho}\cdot\left(\frac{2\pi}{\lambda^{(n)}}\right)^2 \quad ,$$

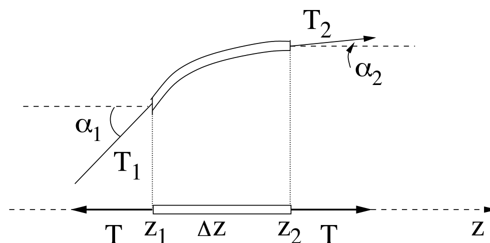
a ovo se poklapa s ranije utvrđenom disperzijskom relacijom za kontinuum (izraz 1.24):

$$\omega^{(n)} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\cdot\frac{2\pi}{\lambda^{(n)}} \quad .$$

Prema tome, funkcija $u^{(n)}(z,t)$ dana izrazom 1.27 doista predstavlja rješenje valne jednadžbe za kontinuum.

Potpunosti radi, pokažimo da valnu jednadžbu možemo izvesti i izravno iz razmatranja kontinuirane elastične niti, pomoću slike 1.19. Horizontalne komponente napetosti zakrivljene niti moraju biti izjednačene (i jednake napetosti u ravnotežnom položaju) jer se segment ne pomiče u z-smjeru, već samo transverzalno na njega:

$$T_1\cos\alpha_1 = T_2\cos\alpha_2 = T \quad .$$



Slika 1.19: Sile na zakrivljeni segment niti, zajedno s napetosti niti na isti segment u ravnotežnom položaju.

Odavdje dobivamo:

$$T_1 \sin\alpha_1 = \frac{T}{\cos\alpha_1}\sin\alpha_1 = T\,\mathrm{tg}\ \alpha_1 = T\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)_{z_1} \quad .$$

Analogno dobivamo:

$$T_2 \sin\alpha_2 = T\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)_{z_2} \quad .$$

S druge strane, jednadžba gibanja za odabrani segment niti glasi:

$$m\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = -\left(T_1\sin\alpha_1 - T_2\sin\alpha_2\right) \quad ,$$

gdje je m masa tog segmenta. Uvrštavanjem gore dobivenih izraza za T_1 i T_2, te izražavanjem mase preko linijske gustoće ρ, konačno dobivamo:

$$\rho\Delta z\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = T\Delta z\frac{\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)_{z_2} - \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)_{z_1}}{\Delta z} \quad ,$$

što u limesu $\Delta z \to 0$ postaje:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2} \quad .$$

Dobiven rezultat identičan je izrazu 1.26, odnosno na drugi način dobivenoj valnoj jednadžbi za kontinuum.

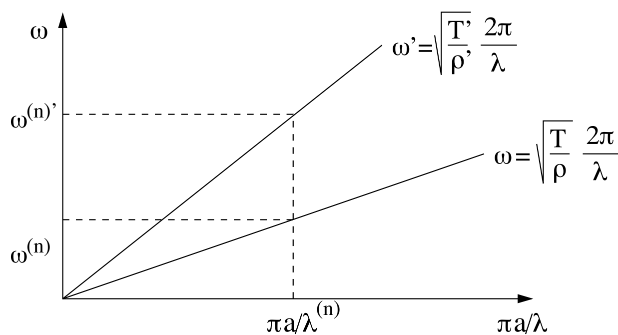
1.4.2 Promjena parametara kontinuiranog sustava

Rastegnemo li elastičnu nit, njena napetost se, dakako, poveća ($T \to T'$, $T' > T$), no pri tome se i njena gustoća smanjuje ($\rho \to \rho'$, $\rho' < \rho$). Ako ne promijenimo razmak između čvrstih krajeva sustava, onda se valna duljina modova titranja neće promijeniti (jer vrijedi $L = n\lambda^{(n)}/2$), no mijenja se odgovarajuća frekvencija.

Ovisnost disperzijske krivulje kontinuuma o parametrima sustava shematski je prikazana na slici 1.20. U limesu velikih valnih duljina ovisnost frekvencije moda o inverzu valne duljine je linearna (vidi str. 27); dodatnim rastezanjem niti povećava se napetost T u njoj, a smanjuje gustoća ρ, pa koeficijent proporcionalnosti između ω i $1/\lambda$ postaje veći. Drugim riječima, disperzijski pravac na slici 1.20 jače je nagnut za rastegnutiju nit. Titranje u danom n-tom modu odvija se većom frekvencijom kada je elastična nit jače zategnuta.

Demonstracijski pokus 1.10: titranje rastegnute gumene cijevi.

Važno uočiti: promjenu frekvencije titranja s napetošću cijevi.



Slika 1.20: Ovisnost disperzijske krivulje kontinuuma o parametrima T i ρ.

Demonstracijski pokus 1.11: titranje nategnute žice (primjer gitare).

Važno uočiti: promjenu frekvencije titranja s napetošću žice.

1.4.3 Valni broj

Valni broj općenito se definira kao:

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \quad ;$$

(mjerna jedinica m^{-1}). Valni broj nam, dakle, kaže koliko se valnih duljina λ nalazi u jedinici duljine sredstva. Nadalje, uvodimo i **kutni valni broj**:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad ;$$

(mjerna jedinica također m^{-1}). Kutni broj kaže za koliko se promijeni argument sinusne funkcije oblika moda kada se varijabla z promijeni za 1 m. Treba naglasiti da se kolokvijalno vrlo često veličina k naziva valnim brojem (bez pridjeva "kutni"), jednako kao što se i ω naziva jednostavno frekvencijom (a ne kutnom ili kružnom frekvencijom) - riječ je o sitnim nepreciznostima koje ne utječu u bitnome na fizički smisao teme koje se raspravlja, pa ćemo i mi ponekad koristiti te pojednostavljene nazive.

Kod niza čestica međusobno razmaknutih za a, vrlo je važna veličina $k^{(n)}a$; ona predstavlja promjenu argumenta sinusne funkcije za $\Delta z{=}a$. Razmotrimo dva krajnja slučaja:
1) $k^{(n)}a \ll 1$ - ovaj je uvjet ekvivalentan uvjetu $\lambda^{(n)} \gg a$ i vrijedi kod nižih modova titranja. U tom se limesu argument funkcije oblika moda malo mijenja od jedne čestice do njenog susjeda.
2) $k^{(n)}a \approx \pi$ - ovaj uvjet vrijedi kod najviših modova (velikih n). Argument sinusne funkcije oblika moda mijenja se tada za π (pola perioda) od jedne čestice do susjedne, pa dobivamo cik-cak konfiguraciju. Veća promjena argumenta sinusne funkcije nije moguća jer bi tada povratne sile imale krivi predznak - u četvrtom ćemo poglavlju ovu tvrdnju pokrijepiti strogim matematičkim argumentima.

Budući da za titranje u nekom modu vrijedi (izraz 1.16):

$$L = n\frac{\lambda^{(n)}}{2} \quad ,$$

dobivamo i sljedeći koristan izraz:

$$L = n\frac{2\pi/k^{(n)}}{2} = \frac{n\pi}{k^{(n)}} \quad ,$$

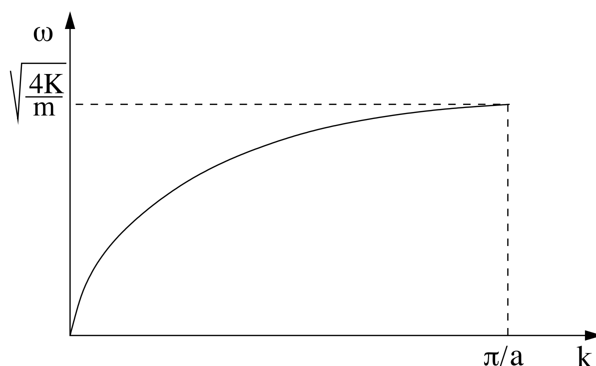
odnosno:

$$k^{(n)}L = n\pi \quad , \tag{1.28}$$

gdje je n redni broj moda. U narednim ćemo poglavljima češće zapisivati izraze preko kutnog valnog broja k, nego preko valne duljine λ. Tako i disperzijsku relaciju 1.21 također možemo zapisati preko parametra $k^{(n)}$, umjesto $\lambda^{(n)}$:

$$\omega^{(n)} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sin\left(\frac{\pi a}{\lambda^{(n)}}\right) = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sin\left(\frac{k^{(n)}a}{2}\right) \quad . \tag{1.29}$$

Ovisnost kutne frekvencije ω o kutnom valnom broju k dana je na slici 1.21. Treba uočiti da se maksimalni kutni valni broj k dobiva za cik-cak konfiguraciju $ka{=}\pi$, tj. kada vrijedi $k{=}\pi/a$.



Slika 1.21: Disperzijska relacija dana kao ovisnost kutne frekvencije ω o kutnom valnom broju k.

Sažetak

U ovom je poglavlju dano uvodno razmatranje harmonijskog titranja, kako u jednostavnim sistemima, tako i u kompliciranijim situacijama poput sistema s više tijela ili kontinuiranog medija. Uveli smo pojam (vlastitog) moda titranja, te sve veličine potrebne za opis istog. Izvedene su osnovne jednadžbe čitavog kolegija, poput disperzijske relacije 1.21 ili valne jednadžbe za kontinuum 1.26. U narednom ćemo poglavlju na temelju matematičkih argumenata naučeno proširiti na najopćenitije moguće načine titranja, te diskutirati pojavu udara. Nakon toga slijedi proučavanje prisilnog titranja i uvođenje koncepta valova u četvrtom poglavlju.

2

Linearnost diferencijalnih jednadžbi i princip superpozicije

U prošlom smo poglavlju razne fizičke probleme svodili na jednu te istu diferencijalnu jednadžbu: jednadžbu harmonijskog oscilatora. Ovdje ćemo detaljnije promotriti svojstva jednadžbi poput jednadžbe harmonijskog oscilatora, te na temelju njih izvesti dodatne zaključke za dosad promatrane sustave, te pripremiti formalizam za kompliciranije situacije.

Diferencijalne jednadžbe oblika:

$$A_n \frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}t^n} + A_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} u}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + A_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + A_0 u = f(t)$$

gdje funkcija f ne ovisi o u, nazivaju se **linearnim** jer funkcija u i njene derivacije u jednadžbu ulaze s prvom potencijom, odnosno linearno (dakle, nema npr. kvadratnih članova, ili produkata različitih derivacija). Ako je funkcija $f(t)$ jednaka nuli (za svaki t), govorimo o homogenoj linearnoj diferencijalnoj jednadžbi - jednadžbe titranja u kojima je povratna sila linearna pripadaju toj klasi jednadžbi. Homogene linearne diferencijalne jednadžbe imaju vrlo važno svojstvo, a to je da se njihova rješenja mogu superponirati: ako su u_1 i u_2 dva različita rješenja dane diferencijalne jednadžbe, tada je i $c_1u_1+c_2u_2$ njeno rješenje (gdje su c_1 i c_2 proizvoljne konstante) - to ćemo njihovo svojstvo u nastavku i dokazati.

Općenitije, linearnost homogenih diferencijalnih jednadžbi i princip superpozicije međusobno su ekvivalentni - ne samo da iz linearnosti diferencijalnih jednadžbi slijedi superponiranje, nego i iz činjenice da za neki problem vrijedi princip superpozicije slijedi linearnost odgovarajućih diferencijalnih jednadžbi.

Ako linearna diferencijalna jednadžba nije homogena (takva će jednadžba opisivati npr. prisilno titranje koje ćemo proučiti u sljedećem poglavlju), princip superpozicije treba malo modificirati. Naime, ako je u_1 neko rješenje nehomogene jednadžbe za koju je nehomogeni član jednak $f_1(t)$, a u_1 neko rješnje iste jednadžbe za koju je nehomogeni član jednak $f_2(t)$, tada će $u_1 + u_2$ biti rješenje te jednadžbe za koju je nehomogeni član jednak $f_1(t)+f_2(t)$. Ovo svojstvo slijedi direktno iz jednadžbi gibanja i bit će diskutirano u sljedećem poglavlju.

Valjanost načela superpozicije za rješenje jednadžbe gibanja harmoijskog oscilatora posljedica je linearnosti jednadžbe - slika je posve drukčija ako su uključeni neharmonijski članovi. Može se pokazati da bi npr. član proporcionalan s x^2 u jednadžbi gibanja doveo do mješanja i množenja dvije istovremene pogonske frekvencije ω_1 i ω_2, stvarajući tako čitav niz harmonijskih frekvencija ($2\omega_1$, $3\omega_1$, $\ldots$, ω_2, ω_2, $\ldots$) i miješanih frekvencija ($\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 - \omega_2$, $\omega_1 - 2\omega_2$, $\ldots$). Ovo će postati jasnije nakon što u četvrtom poglavlju naučimo osnove Fourierove analize.

2.1 Linearna superpozicija modova titranja

Do sada smo razmatrali slučajeve kada je sustav pobuđen na titranje u samo jednom od mogućih modova. Podsjetimo se da titranje u nekom modu (npr. n-tom) možemo pobuditi tako da ostvarimo početne uvjete za taj mod (tj. otklonimo čestice iz položaja ravnoteže tako da se postigne prostorni oblik dotičnog moda); tada za otklon i-te čestice u n-tom modu u t=0 imamo:

$$u_i^{(n)}(0) = A_i^{(n)} = A^{(n)} \sin\left(k^{(n)} z_i\right) \quad .$$

Zatim se čestice puste da titraju, pa vrijedi:

$$u_i^{(n)}(t) = u_i^{(n)}(0) \cos\left(\omega^{(n)} t\right) = A_i^{(n)} \cos\left(\omega^{(n)} t\right) = A^{(n)} \sin\left(k^{(n)} z_i\right) \cos\left(\omega^{(n)} t\right) \quad .$$

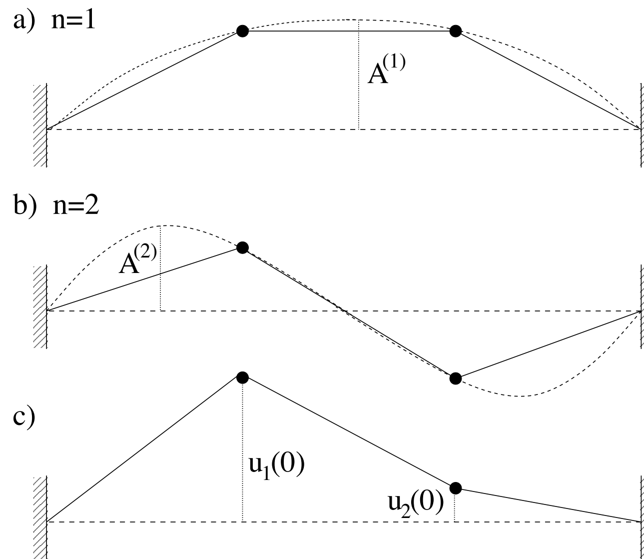
Kao što smo naučili u prethodnom poglavlju, sve čestice titraju jednom te istom frekvencijom $\omega^{(n)}$.

U kontekstu superpozicije, pitanje koje nam se nameće je sljedeće: možemo li ostvariti istovremeno titranje dvaju ili više modova titranja u danom sustavu? Da bismo došli do odgovora, krenimo od razmatranja početnih uvjeta: pokažimo najprije da je uvijek moguće ostvariti početne uvjete koji odgovaraju linearnoj superpoziciji modova. Uzmimo za **primjer sustav od dvije čestice** (N=2) i pretpostavimo neku amplitudu $A^{(1)}$ za prvi mod (vidi sliku 2.1a):

$$u_i^{(1)}(0) = A_i^{(1)} = A^{(1)} \sin\left(k^{(1)} z_i\right) \quad ,$$

i različitu amplitudu $A^{(2)}$ za drugi mod (vidi sliku 2.1b):

$$u_i^{(2)}(0) = A_i^{(2)} = A^{(2)} \sin\left(k^{(2)} z_i\right) \quad .$$



Slika 2.1: Sistem s dvije čestice: (a) početni uvjeti prvog moda; (b) početni uvjeti drugog moda; (c) superpozicija početnih uvjeta dva moda.

Superpoziciju ovih dvaju modova dobivamo tako da za svaku česticu zbrojimo odgovarajuće otklone iz položaja ravnoteže; u početnom trenutku imamo (vidi sliku 2.1c):

$$u_i(0) = u_i^{(1)}(0) + u_i^{(2)}(0) \quad .$$

Početni otkloni čestica $u_1(0)$ i $u_2(0)$ nisu više jednaki po iznosu (kao što su bili i u prvom i u drugom modu titranja) - osim u slučaju kada nema primjese jednog od modova ($A^{(1)} = 0$ ili $A^{(2)} = 0$). Možemo pretpostavljati razne vrijednosti $A^{(1)}$ i $A^{(2)}$ (i pozitivne i negativne!) i dobivati razne kombinacije $u_1(0)$ i $u_2(0)$. Vrijedi i obrat; tj. bilo koji početni otkloni $u_1(0)$ i $u_2(0)$ mogu se raspisati kao superpozicija dvaju modova s nekim amplitudama $A^{(1)}$ i $A^{(2)}$. Ova se tvrdnja lagano pokazuje i formalno; budući da za prvu česticu vrijedi i=1 i z_1=a, za nju dobivamo:

$$u_1(0) = A^{(1)} \sin\left(k^{(1)}a\right) + A^{(2)} \sin\left(k^{(2)}a\right) \quad ,$$

dok za drugu česticu vrijedi i=2 i z_2=$2a$, tj.:

$$u_2(0) = A^{(1)} \sin\left(2k^{(2)}a\right) + A^{(2)} \sin\left(2k^{(2)}a\right) \quad .$$

U sustavu s dvije čestice koji razmatramo, vrijedi L=$3a$; za prvi mod titranja (n=1) imamo (vidi izraz 1.28) stoga:

$$k^{(1)}L = \pi \quad \Rightarrow \quad k^{(1)}a = \frac{\pi}{3} \quad ,$$

a za drugi (n=2):

$$k^{(2)}L = 2\pi \quad \Rightarrow \quad k^{(2)}a = \frac{2\pi}{3} \quad .$$

Uvrštavanjem i uz:

$$\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ,$$

konačno dobivamo:

$$u_1(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}A^{(1)} + \frac{\sqrt{3}}{2}A^{(2)} \quad , \tag{2.1}$$

$$u_2(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}A^{(1)} - \frac{\sqrt{3}}{2}A^{(2)} \quad . \tag{2.2}$$

Iz ovog sustava jednadžbi, za svake zadane otklone $u_1(0)$ i $u_2(0)$ možemo naći $A^{(1)}$ i $A^{(2)}$:

$$A^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left[u_1(0) + u_2(0)\right] \quad ,$$

$$A^{(2)} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left[u_1(0) - u_2(0)\right] \quad .$$

Općenito pravilo: u sustavu od N čestica, bilo koji odabir početnih otklona čestica može se prikazati kao rezultat superpozicije N modova s odgovarajućim amplitudama.

Sljedeće pitanje koje treba proučiti je način titranja čestica nakon što ih otpustimo (dakle, za proizvoljan t). U tu svrhu razmotrimo jednadžbu gibanja i-te čestice:

$$m\frac{\mathrm{d}^2u_i}{\mathrm{d}t^2} = -K\left(u_i - u_{i-1}\right) + K\left(u_{u+1} - u_i\right) \quad .$$

Budući da je ova diferencijalna jednadžba linearna, za nju vrijedi da je suma nekih njenih rješenja također rješenje. Ako sistem ima N čestica, za gornju jednadžbu gibanja kao rješenja smo dobili N modova. Uzmimo npr. r-ti i s-ti mod; za njih dakle vrijedi:

$$m\frac{\mathrm{d}^2u_i^{(r)}}{\mathrm{d}t^2} = -K\left(u_i^{(r)} - u_{i-1}^{(r)}\right) + K\left(u_{u+1}^{(r)} - u_i^{(r)}\right) \quad ,$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2u_i^{(s)}}{\mathrm{d}t^2} = -K\left(u_i^{(s)} - u_{i-1}^{(s)}\right) + K\left(u_{u+1}^{(s)} - u_i^{(s)}\right) \quad .$$

Zbrajanjem ovih jednadžbi dobivamo:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\left(u_i^{(r)}+u_i^{(s)}\right)}{\mathrm{d}t^2}=-K\left[\left(u_i^{(r)}+u_i^{(s)}\right)-\left(u_{i-1}^{(r)}+u_{i-1}^{(s)}\right)\right]+K\left[\left(u_{i+1}^{(r)}+u_{i+1}^{(s)}\right)-\left(u_i^{(r)}+u_i^{(s)}\right)\right] \quad .$$

Očito je da i zbroj dvaju rješenja:

$$\left(u_i^{(r)}+u_i^{(s)}\right)$$

zadovoljava istu diferencijalnu jednadžbu, pa je prema tome i taj zbroj njeno rješenje - ovo je zoran primjer superpozicije rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe. Isto pravilo vrijedi i za svaki zbroj više rješenja.

Navedeno pravilo vrijedi u bilo kojem trenutku, pa i početnom. Prema tome, ako smo u trenutku t=0 imali superpoziciju N modova, onda ona ostaje ista i kasnije, za proizvoljan trenutak t. Titranje i-te čestice tada je opisano sumom:

$$u_i(t)=\sum_{n=1}^{N}u_i^{(n)}(0)\cos\left(\omega^{(n)}t\right)=\sum_{n=1}^{N}A^{(n)}\sin\left(k^{(n)}z_i\right)\cos\left(\omega^{(n)}t\right) \quad . \tag{2.3}$$

Svaki mod koje je u t=0 zastupljen s amplitudom $A^{(n)}$ nastavlja titrati frekvencijom $\omega^{(n)}$ neovisno o drugim modovima. Drugim riječima, svi pobuđeni modovi titraju istodobno u superpoziciji, svaki sa svojom amplitudom $A^{(n)}$ i frekvencijom $\omega^{(n)}$.

Titranje pojedine i-te čestice rezultat je doprinosa svih pobuđenih modova titranja. Prema gornjoj relaciji, ono je superpozicija titranja na raznim frekvencijama $\omega^{(n)}$, s odgovarajućim amplitudama $A^{(n)}\sin\left(k^{(n)}z_i\right)$. Je li takvo titranje periodičko? U teoriji općenito nije, već samo u vrlo specijalnom slučaju kada su periodi pojedinih modova sumjerljivi (tj. kada su im omjeri racionalni). Dakako, budući da je fizika bazirana na mjerenjima (koja su moguća samo unutar određene točnosti), u praksi se i titranje u superpoziciji modova može smatrati periodičnim, jer se svaki iracionalni period može aproksimirati (konzistentno s preciznošću mjerenja) nekim racionalnim, a racionalni brojevi su po definiciji sumjerljivi. Period nakon kojeg se titranje zbilja počinje ponavljati u takvim situacijama zna biti jako velik, puno veći od perioda titranja svakog od modova...

Demonstracijski pokus 2.1: razne superpozicije modova (u sustavu s dvije čestice)

Važno uočiti: ovisnost titranja o početnim uvjetima; pobuđivanje različitih modova titranja.

2.2 Amplitudna modulacija. Udari.

Pogledajmo poseban slučaj superpozicije dvaju moda: onaj u kojem su sustavu od dvije čestice (N=2) istodobno pobuđena oba moda i to s jednakim amplitudama:

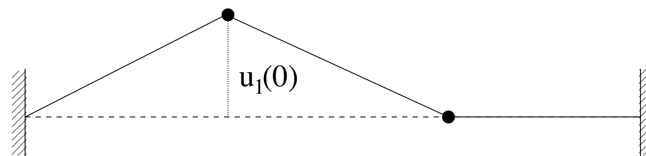
$$A^{(1)}=A^{(2)}=A \quad .$$

To se može ostvariti pomoću početnih otklona (vidi izraze 2.1 i 2.2):

$$u_1(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}A^{(1)}+\frac{\sqrt{3}}{2}A^{(2)}=\sqrt{3}A \quad ,$$

$$u_2(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}A^{(1)} - \frac{\sqrt{3}}{2}A^{(2)} = 0 \quad .$$

Ovi početni otkloni ilustrirani su na slici 2.2.



Slika 2.2: Poseban slučaj superpozicije dvaju moda sistema s dvije čestice.

Nakon početnog trenutka nastaje složeno titranje frekvencijama obaju modova:

$$u_1(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}A^{(1)}\cos\left(\omega^{(1)}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}A^{(2)}\cos\left(\omega^{(2)}t\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}A\left[\cos\left(\omega^{(1)}t\right) + \cos\left(\omega^{(2)}t\right)\right] \quad , \tag{2.4}$$

$$u_2(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}A^{(1)}\cos\left(\omega^{(1)}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}A^{(2)}\cos\left(\omega^{(2)}t\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}A\left[\cos\left(\omega^{(1)}t\right) - \cos\left(\omega^{(2)}t\right)\right] \quad . \tag{2.5}$$

Demonstracijski pokus 2.2: superpozicija dvaju moda s jednakim amplitudama.

Važno uočiti: amplitudno modularno titranje.

Svaka čestica sistema titra istodobno i "prema" prvom modu frekvencijom $\omega^{(1)}$ i prema drugom modu frekvencijom $\omega^{(2)}$. U takvim situacijama nastaju **udari** (*engl.* beats). Da bi do kraja ovu pojavu matematički proučili trebat će nam sljedeće trigonometrijske relacije:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad ,$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \quad .$$

Nadalje, uvest ćemo dvije nove oznake - srednju frekvenciju:

$$\overline{\omega} = \frac{\omega^{(1)} + \omega^{(2)}}{2} \quad ,$$

i razliku dvaju frekvencija:

$$\Delta\omega = \omega^{(2)} - \omega^{(1)} \quad .$$

Titranje pojedinih čestica raspisujemo sada iz izraza 2.4 i 2.5, uz upotrebu novodefiniranih veličina i navedene trigonometrijske relacije; dobivamo:

$$u_1(t) = \sqrt{3}A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\left(\overline{\omega}t\right) \quad ,$$

$$u_2(t) = \sqrt{3}A\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\sin\left(\overline{\omega}t\right) \quad ,$$

Ako se frekvencije titranja modova $\omega^{(1)}$ i $\omega^{(2)}$ *malo razlikuju*, tj. ako vrijedi:

$$\Delta\omega \ll \overline{\omega} \quad ,$$

onda se veličine:

$$\sqrt{3}A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \qquad \text{i} \qquad \sqrt{3}A\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

sporo mijenjaju u odnosu prema:

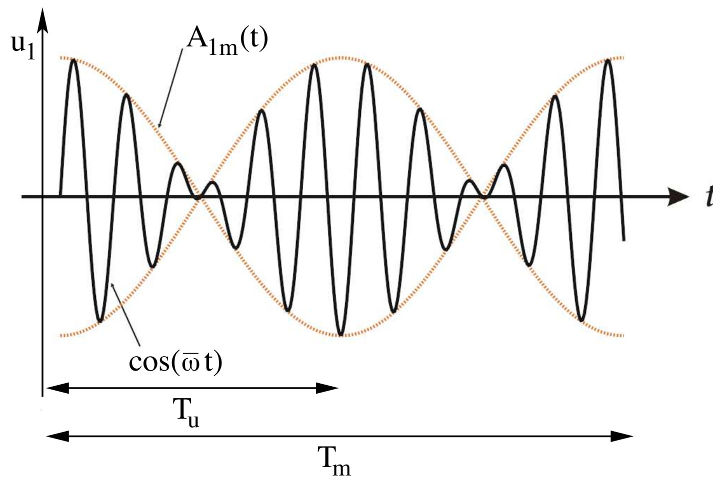
$$\cos\left(\varpi t\right) \qquad \text{i} \qquad \sin\left(\varpi t\right) \quad .$$

Ovu pojavu nazivamo amplitudnom modulacijom (kratica: AM). Za prvu česticu veličinu:

$$A_{1m}(t) = \sqrt{3}A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \tag{2.6}$$

možemo shvatiti kao (sporo) vremenski promjenljivu ("moduliranu") amplitudu, pa vrijedi:

$$u_1(t) = A_{1m}(t)\cos\left(\varpi t\right) \quad .$$



Slika 2.3: Pojava udara na primjeru sistema s dvije čestice.

Na slici 2.3 prikazana je ovisnost pomaka prve čestice o vremenu. Vidimo da je "brzo" titranje frekvencijom ϖ "omotano" (tj. modulirano) sporo titrajućom ovojnicom danom s $A_{1m}(t)$. Period udara T_u je vrijeme između dvije susjedne nule amplitude - unutar jednog perioda titraja imamo mnogo titraja frekvencijom ϖ. Valja uočiti i to da je frekvencija udara dva puta veća od frekvencije modulacije (odnosno da je period udara T_u dva puta manji od perioda modulacije T_m). Razlog je vrlo jednostavan: budući da se unutar ovojnice definirane moduliranom amplitudom $A_{1m}(t)$ vrijedost veličine $u(t)$ ionako mnogo puta promijeni iz pozitivne u negativnu, posve je nebitno što se eventualno nalazimo u području gdje je trigonometrijska funkcija u izrazu 2.6 negativna - frekvenciju udara definira vrijeme između susjednih ekstrema ili ekvivalentno, vrijeme između susjednih nultočaka modulirane amplitude $A_{1m}(t)$.

Za drugu česticu analogno se dobiva:

$$u_2(t) = A_{2m}(t)\sin\left(\varpi t\right) \quad ,$$

gdje je:

$$A_{2m}(t) = \sqrt{3}A\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \quad .$$

Graf za $u_2(t)$ je sličan onome na slici 2.3, s pomakom u fazi udara (modularna amplituda sada se ponaša kao sinus, dok je za $u_1(t)$ bila kosinus). Kada je $A_{2m}(t)$ maksimalan, $A_{1m}(t)$ je minimalan

i obrnuto.

Budući da je energija titranja proporcionalna s amplitudom na kvadrat (koje pak osciliraju kao kosinus za u_1, odnosno kao sinus za u_2), vidimo da energija ovog sistema prelazi s s jedne čestice na drugu i natrag - ukupna energija je, dakako, konstantna (jer je $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$), a frekvencija kojim se "prijenos" energije ponavlja jednaka je frekvenciji udara.

Udari kao pojava dakako nisu nužno vezani za primjer razmotren ovdje (sustav od dvije čestice), ni za diskusiju modova titranja - oni se pojavljuju u bilo kojoj situaciji u kojoj se superponiraju titranja bliskih frekvencija. Na udare ćemo se vratiti još jednom pri razmatranju zvuka u šestom poglavlju.

Sažetak

U ovom smo se poglavlju pozabavili kombiniranjem modova titranja - pokazali smo da se proizvoljno titranje nekog sustava može (jednoznačno) "rastaviti" na superpoziciju modova s odgovarajućim amplitudama. Uveli smo i pojmove amplitudne modulacije i udara - posve općenito, pokazat ćemo da se udari pojavljuju pri svakoj superpoziciji titranja ili valova bliskih frekvencija - detaljnije ćemo ih stoga upoznati pri proučavanju zvuka (akustike) u šestom poglavlju...

3

Prisilno titranje mehaničkog sustava

3.1 Jednostavan harmonijski oscilator s prisilom i gušenjem

Do sada smo promatrali harmonijske oscilatore kod kojih su jedine bitne sile bile one koje su vodile na linearnu povratnu silu - u ovom poglavlju pogledat ćemo i utjecaj drugih često prisutnih sila, kako na jednostavan oscilator, tako i na kompliciranije sustave s puno tijela. Te dodatne sile koje uvodimo u ovom poglavlju za početak će imati specijalan (jednostavan) oblik, no s vremenom ćemo ta jednostavna razmatranja poopćiti na proizvoljno komplicirane scenarije. Započnimo s najjednostavnijim slučajem.

Neka na česticu vezanu s dvama elastičnim oprugama na masivni zid (poput one na slici 1.6) djeluje i dodatna **vanjska** sila oblika:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad , \tag{3.1}$$

gdje je F_0 veličina neovisna o vremenu. Sila, dakle, nema (za sada) proizvoljnu ovisnost o vremenu, nego je harmonijski periodična, s kružnom frekvencijom ω. Za tu silu standardno se koriste i izrazi *pogonska sila* ili *sila prisile*. U kasnijim poglavljima pozabavit ćemo se i problemom pogonskih sila koje nisu harmonijske.

Dakako, na česticu, kao i prije djeluje i elastična povratna sila, no to neće biti sve - uvodimo i silu kojom ćemo promatranom sustavu dozvoliti da gubi energiju. Za takvu **silu trenja** koja guši oscilacije pretpostavit ćemo da ima sljedeći oblik:

$$F_{\mathrm{tr}} = -bv \quad , \tag{3.2}$$

gdje je v je brzina tijela koje oscilira, a b neka konstanta koja karakterizira sredstvo kroz koji se čestica giba (i interakciju čestica - sredstvo). Dakle, nije riječ o sili trenja između tijela koje se giba (ili "pokušava gibati") i podloge, već o sili otpora poput one kojom se opisuje sporo gibanje tijela kroz srednje gust fluid (i koju smo detaljno diskutirali na "Općoj fizici 1" u trećem poglavlju). Takva je sila trenja općenito najvažnija za scenarije s oscilacijama - kasnije ćemo se osvrnuti i na sustave u kojima se javlja trenje drugačije funkcionalne ovisnosti (npr. neovisno o brzini).

Ukupna sila na tijelo koje oscilira uz gore uvedene sile prisile i tranja dana je stoga s:

$$F_{\mathrm{ukupno}} = -2Ku - bv + F(t) \quad .$$

Uvrštavanjem u drugi Newtonov zakon, dobivamo:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{2K}{m}u - \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{m}F(t) \quad .$$

Definiramo li tzv. **relaksacijsko vrijeme** τ:

$$\tau = \frac{m}{b} \quad ,$$

i uz zamjenu:

$$\omega_0^2 = \frac{2K}{m} \quad ,$$

dobivamo diferencijalnu jednadžbu za tjerani harmonijski oscilator s gušenjem zapisanu u standardnom obliku:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad . \tag{3.3}$$

Umjesto relaksacijskog vremena τ, ponekad se u jednadžbi tjeranog harmonijskog oscilatora s gušenjem koristi parametar Γ=γ=$1/\tau$. Uočite da je broj opruga koji nam vežu tijelo na zid (uobičajeno jedna ili dvije) zapravo irelevantan, isti nam mijenja samo gornji izraz za ω_0.

U dobivenoj diferencijalnoj jednadžbi, sada se pojavljuju dvije frekvencije: ω_0 je frekvencija koja je zadana parametrima sustava (pa ju zovemo *vlastitom ili svojstvenom frekvencijom sustava*), a frekvencija vanjske sile ω može u principu biti bilo kakava (ovisi o izvoru vanjske sile). Općenito vrijedi da su te dvije frekvencije različite ($\omega_0 \neq \omega$), pa se postavlja pitanja kojom će frekvencijom titrati dani oscilator ako ga tjera neka vanjska periodična sila. Također se postavlja pitanje uloge početnih uvjeta u ovom problemu.

Odgovore na postavljenja pitanja dobivamo rješavanjem diferencijalne jednadžbe 3.3 - isto ćemo započeti krećući od matematičkog pravila da je opće rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe (a jednadžba 3.3 je takva) dano s:

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) \quad ,$$

gdje je $u_h(t)$ *opće rješenje* odgovarajuće homogene diferencijalne jednadžbe (koju dobijemo tako da jednostavno "izbacimo" nehomogeni član), a $u_p(t)$ jedno tzv. *posebno ili partikularno rješenje* dane nehomogene diferencijalne jednadžbe. Kao što ćemo pokazati u nastavku, homogenu diferencijalnu jednadžbu najčešće znamo riješiti; glavni je problem, dakle, nalaženje posebnog rješenja i vrlo često se traženje istoga svodi na metodu "pokušaja i promašaja". U nastavku poglavlja na ovaj ćemo način pristupiti rješavanju jednadžbe tjeranog oscilatora s gušenjem.

3.1.1 Gušeni harmonijski oscilator

Razmotrimo prvo situaciju kada je diferencijalna jednadžba 3.3 homogena, tj. kada je nehomogeni član (vanjska pogonska sila) jednak nuli. Riječ je, dakle, o **gušenom harmonijskom oscilatoru**, bez vanjske sile; njegova je diferencijalna jednadžba:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0 \quad . \tag{3.4}$$

Probajmo "pogoditi" rješenje ove jednadžbe. Da bi funkcija $u_h(t)$ bila rješenje gornje jednadžbe, mora se njenim svakim uzastopnim deriviranjem dobivati (do na konstantu) ista funkcija - taj zahtjev od svih mogućih funkcija ispunjava jedino eksponencijalna. Stoga ćemo za početak potražiti rješenje oblika:

$$u_h(t) = Ce^{\omega t} \quad , \tag{3.5}$$

gdje je C konstanta koju tek treba odrediti, a ω veličina za koju očekujemo da će biti posve definirana sustavom (odnosno veličinama ω_0 i τ). Indeksom h samo naglašavamo da se radi o homogenom rješenju općenite jednadžbe 3.3.

Prije daljnjeg matematičkog raspisivanja, naglasimo dva vrlo bitna detalja. Kao prvo, jednadžba harmonijskog oscilatora (i tjeranog i "običnog") diferencijalna je jednadžba *drugog* reda i njeno općenito rješenje stoga mora uključivati dvije "konstante integracije" - drugim riječima, očekujemo da ćemo u konkretnim situacijama za rješenje dobiti nekakvu kombinaciju jednostavnih članova danih izrazom 3.5. Pri tome nam se može desiti da jedan od članova (ili čak oba) sadrži eksponencijalno *padajuću* funkciju - dakle, ne smijemo inzistirati da veličina ω u gornjem rješenju nužno bude pozitivna!

Druga važna diskusija tiče se nužnosti upotrebe eksponencijalne funkcije kao općeg rješenja - jesmo li njenim odabirom ipak ispustili neku klasu funkcija koja bi mogla biti rješenje izraza 3.4? Odgovor je pozitivan - rješenje 3.5 "bez dodatne slobode" je zbilja nepotpuno. Naime, linearna kombinacija sinusa i kosinusa u posebnim se slučajevima također može pri svakom deriviranju "svesti na samu sebe" (do na konstantu) - stoga bi bilo poželjno u opće rješenje uključiti i takve oscilirajuće varijante. No, to možemo napraviti i bez da se vraćamo na izraz 3.5 i napišemo ga u drugačijem (kompliciranijem) obliku - sve što trebamo napraviti je dozvoliti veličini ω da bude i kompleksna! Na "Općoj fizici 2" već smo se sreli s Eulerovom jednadžbom (pri diskusiji krugova izmjenične struje):

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \quad ;$$

već ona nam pokazuje da eksponencijalna funkcija s kompleksnim argumentom vodi na sinusoidalne oscilacije - to ćemo u nastavku i eksplitno dokazati i dati detaljnu diskusiju fizike koja se pri tome dešava. To što smo veličini ω dozvolili da bude kompleksna, ne znači da to mogu biti i ostale veličine koje promatramo - za elongaciju u_h inzistirati ćemo da bude realna (jer bi u protivnom imali problema s fizičkom interpretacijom iste). Drugim riječima, to što veličini ω_g dozvoljavamo da bude kompleksna matematički je trik kojim se, dakako, ne mijenja interpretacija fizike promatranog sustava.

Dakle, ostajemo pri rješenju 3.5, no dozvoljavamo da ω bude i negativan i kompleksan; kao konačno rješenje očekujemo razne kombinacije jednostavnog pretpostavljenog rješenja - u nastavku ćemo pokazati da pri tome imamo različite varijante, ovisno o detaljima samog sustava (odnosno njegovim parametrima ω_0 i τ).

Uvrstimo sada pretpostavljeno rješenje 3.5 u diferencijalnu jednadžbu 3.4 i pogledajmo kada ono uistinu je rješenje:

$$\omega^2 C e^{\omega t} + \frac{\omega}{\tau} C e^{\omega t} + \omega_0^2 C e^{\omega t} = 0 \quad .$$

Ova će jednadžba biti zadovoljena ako u svakom trenutku t vrijedi:

$$\omega^2 + \frac{1}{\tau}\omega + \omega_0^2 = 0 \quad .$$

Dobivena kvadratna jednadžba (po varijabli ω) općenito ima dva rješenja za ω:

$$\omega_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 - \omega_0^2} \quad . \tag{3.6}$$

Opće rješenje homogene diferencijalne jedanadžbe dobivamo stoga kao linearnu kombinaciju rješanja s dvije moguće vrijednosti veličine ω_1 i ω_2:

$$u_h(t) = C_1 e^{\omega_1 t} + C_2 e^{\omega_2 t} \quad . \tag{3.7}$$

Ovisno o jakosti gušenja (tj. relaksacijskom vremenu τ) i jakosti elastične povratne sile (tj. vlastitoj frekvenciji ω_0), vrijednosti ω_1 i ω_2 bit će u bitnome različite (pozitivne, negativne, kompleksne), pa će dobiveno općenito rješenje homogene diferencijalne jedanadžbe pokazivat vrlo različito fizičko

ponašanje - pogledajmo redom razne slučajeve.

a) Slabo gušenje

Promotrimo prvo limes vrlo velikog relaksacijskog vremena τ - budući da je τ obrnuto proporcionalno konstanti gušenja b, on je velik kada je b malen, odnosno kada je gušenje slabo. Za slabo gušenje, dakle, vrijedi:

$$b \to 0 \quad \Rightarrow \quad \tau \gg 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\tau} \ll \omega_0 \quad .$$

Odmah vidimo da će izraz pod korijenom u jednadžbi 3.6 u ovom limesu biti negativan, tj. da će korijen kao takav biti kompleksan:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1} \cdot \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2} = i\omega_g \quad ,$$

gdje smo s ω_g označili veličinu koju ćemo nazvati *"frekvencijom gušenih titraja"*:

$$\omega_g = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2} \quad . \tag{3.8}$$

Frekvencija ω_g realna je i pozitivna veličina, i zbilja opisuje oscilirajući dio gušenih oscilacija (što ćemo i pokazati u nastavku).

Veličine ω_1 i ω_2 iz izraza 3.6 u limesu slabog gušenja jednake su stoga:

$$\omega_1 = -\frac{1}{2\tau} + i\omega_g \quad , \quad \omega_2 = -\frac{1}{2\tau} - i\omega_g \quad .$$

pa opće rješenje homogene jednadžbe (izraz 3.7) postaje:

$$u_h(t) = C_1 e^{\left(-\frac{t}{2\tau} + i\omega_g t\right)} + C_2 e^{\left(-\frac{t}{2\tau} - i\omega_g t\right)} = (C_1 + C_2)\, e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\omega_g t) + i\,(C_1 - C_2)\, e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin(\omega_g t) \quad .$$

Zahtijevamo da veličina $u_h(t)$ bude realna (tj. da ne bude kompleksna), kao da nismo pri rješavanju dopustili uvođenje kompleksnih brojeva; taj zahtjev vodi nas na uvjet da je zagrada u drugom članu gornje jednadžbe jednaka nuli:

$$C_1 - C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 \quad .$$

Dakle, opće rješenje u limesu vrlo velikog relaksacijskog vremena τ postaje:

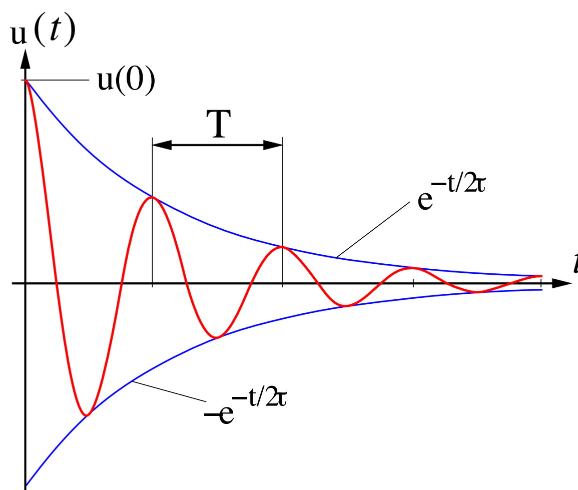
$$u_h(t) = 2C_1\; e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\omega_g t) = A_h\; e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\omega_g t) \quad , \tag{3.9}$$

gdje konstantu A_h $(= 2C_1)$ određujemo, dakako, iz početnog uvjeta:

$$u_h(0) = A_h \quad .$$

Dobiven izraz 3.9 uključuje samo jednu neodređenu konstantu (koju nam do kraja definira početni odmak iz ravnoteže) - on kao takav stoga nije posve općenit i odnosi se samo na situaciju kada titranje u trenutku t=0 započinje s točno određenom brzinom (zapravo različitom od nule). U skladu s diskusijom u potpoglavlju 1.1.6, posve općenito rješenje dobilo bi se ili dodavanjem člana analognog postojećem koji umjesto kosinusa sadrži funkciju sinus, ili dodavanjem faznog pomaka ϕ u argument kosinusa. Nijedan od ovih "dodataka" ne mijenja u bitnome fiziku slabo gušenih oscilacija, pa ih ipak nećemo uvoditi - matematika u daljnjim izvodima time ostaje manje komplicirana. Rješavanju konkretnih numeričkih problema treba ipak pristupiti s općenitim izrazom:

$$u_h(t) = A_h\; e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\omega_g t + \phi) \quad . \tag{3.10}$$



Slika 3.1: Titranje sa slabim gušenjem.

Sada možemo **zaključiti**: ako titranje sa slabim gušenjem ostvarujemo tako da u t=0 otklonimo česticu iz položaja ravnoteže za neki iznos i pustimo da titra, titranje se odvija frekvencijom ω_g (ω_g<ω_0, vidi izraz 3.8), uz eksponencijalno smanjivanje amplitude (vidi sliku 3.1 i izraz 3.9). Amplituda se za faktor 1/e smanji unutar vremena t=2τ. Što je relaksacijsko vrijeme τ kraće, eksponencijalni pad je brži (eksponencijala je "strmija" na slici 3.1). Vrijeme T označeno na slici odgovara periodu kosinusa u izrazu 3.9:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_g} \quad .$$

Demonstracijski pokus 3.1: gušeni harmonijski oscilator - "crtanje amplitude"

Važno uočiti: krivulju koja opisuje amplitudu titranja u vremenu.

Energija slabo gušenog oscilatora

Izračunajmo gubitak energije gušenog oscilatora u jedinici vremena (tj. "gubitak snage"). Kinetička energija mase je u svakom trenutku jednaka:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad ,$$

gdje je v trenutačna brzina mase:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\mathrm{d}u_h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[A_h e^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(\omega_g t)\right] = -\frac{1}{2\tau}A_h e^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(\omega_g t) - \omega_g A_h e^{-\frac{t}{2\tau}}\sin(\omega_g t) = \\ &= -A_h e^{-\frac{t}{2\tau}}\left[\frac{1}{2\tau}\cos(\omega_g t) + \omega_g \sin(\omega_g t)\right] \quad . \end{aligned}$$

Kvadriranjem ovog izraza za brzinu dobivamo članove koji sadrže kvadrate trigonometrijskih funkcija, te njihov produkt. Srednju vrijednost kinetičke energije u jednom periodu titranja, od trenutka t do trenutka $t+T$, naći ćemo iz izraza:

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} E_k(t')\mathrm{d}t' \quad .$$

Ako je gušenje slabo, eksponencijalni faktori u izrazu za brzinu i energiju bit će praktički konstantni tijekom jednog perioda, pa se usrednjavanje svodi na računanje sljedećih srednjih vrijednosti[1]:

$$\langle \cos^2(\omega_g t)\rangle = \langle \sin^2(\omega_g t)\rangle = \frac{1}{2} \quad ,$$

$$\langle \cos(\omega_g t)\sin(\omega_g t)\rangle = 0 \quad .$$

Uvrštavanjem dobivamo:

$$\langle E_k\rangle = \frac{m}{2}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 + \omega_g^2\right] A_h^2 e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{m}{4}\left[\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 + \omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right] = \frac{1}{4} m\omega_0^2 A_h^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad .$$

Znamo s “Opće fizike 1” da je srednja vrijednost potencijalne energije jednaka srednjoj vrijednosti kinetičke energije ($\langle E_k\rangle = \langle E_p\rangle$), pa je tada srednja vrijednost ukupne energije dana s:

$$\langle E\rangle = \langle E_k\rangle + \langle E_p\rangle = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A_h^2 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad .$$

Energiju oscilator gubi po eksponencijalnom zakonu.

Gubitak snage (tj. gubitak energije u jedinici vremena iznosi):

$$P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle E\rangle = -\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{2} m\omega_0^2 A_h^2 e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = -\frac{\langle E\rangle}{\tau} \quad .$$

Energija oscilatora troši se, dakako, na rad sile gušenja; može se i eksplicitno pokazati (vidi npr. prvi dio berkeleyskog udžbenika, str. 128) da vrijedi:

$$\langle F_{\mathrm{tr}} \cdot v\rangle = \frac{\langle E\rangle}{\tau}$$

Faktor dobrote Q (*engl.* quality factor) gušenog oscilatora definira se kao:

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \, \frac{\text{pohranjena energija}}{\text{gubitak energije u jednom pediodu}} = \\ &= 2\pi \, \frac{\langle E\rangle}{|P|T} = \frac{2\pi}{T}\frac{\langle E\rangle}{\langle E\rangle/\tau} = \omega_g \tau \quad . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Budući da za slabo gušenje vrijedi $\omega_g \approx \omega_0$ i $\tau \gg T$, faktor dobrote Q jednak je:

$$Q \approx \omega_0 \tau = \frac{2\pi}{T}\tau \gg 1 \quad . \tag{3.12}$$

Dakle, slabo gušeni oscilator ima velik faktor dobrote Q (u principu zato jer se mnogo titraja izvrši unutar vremena τ). Za jako gušenje pokazat ćemo da $Q \to 1$, tj. da jako gušeni oscilator ima malen faktor dobrote Q.

b) Kritično gušenje

Kada se gušenje dovoljno poveća (dakle, b raste, a τ se smanjuje), dolazimo do situacije u kojoj vrijedi:

$$\frac{1}{2\tau} = \omega_0 \quad .$$

Uvrštavanjem u izraz 3.8, dobivamo:

$$\omega_g = \omega_0\,\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2} = \omega_0\,\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega_0}\right)^2} = \omega_0\,\sqrt{1-1} = 0 \quad .$$

[1]Postupak računa je analogan onom napravljenom za srednju kinetičku i potencijalnu energiju koji je napravljen na “Općoj fizici 1”

Kako se gušena frekvencija titranja približava nuli ($\omega_g \to 0$), oscilacije postaju sve sporije i u limesu *nestaju*. To je uvjet za kritično gušenje. Dva rješenja za frekvenciju dobivena u općenitom slučaju (izraz 3.6), u ovom slučaju kritičnog gušenja svode se na jedno:

$$\omega_1 = \omega_2 = -\frac{1}{2\tau} \quad .$$

Opće rješenje za $u(t)$ (izraz 3.7) svodi se stoga na samo jedan član oblika:

$$C_1 e^{\omega t} = C_1 e^{-t/(2\tau)} \quad .$$

Teorija diferencijalnih jednadžbi zahtjeva postojanje dva linearno nezavisna rješenja jednadžbe 3.4, a u ovom specijalnom slučaju kritičnog gušenja opće rješenje 3.7 daje nam samo jedno. Drugo rješenje potražit ćemo pretpostavljajući ovakav oblik:

$$u_{h,2} = C_2 t e^{-t/(2\tau)} \quad .$$

Da bi ovu pretpostavku uvrstili u diferencijalnu jednadžbu gušenog oscilatora (izraz 3.4), trebamo izračunati prvu i drugu derivaciju od $u_{h,2}$:

$$\frac{\mathrm{d}u_{h,2}}{\mathrm{d}t} = C_2 e^{-t/(2\tau)} + C_2 t e^{-t/(2\tau)} \left(-\frac{1}{2\tau}\right) = C_2 \left(1 - \frac{t}{2\tau}\right) e^{-t/(2\tau)} \quad ;$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 u_{h,2}}{\mathrm{d}t^2} &= C_2 e^{-t/(2\tau)} \left(-\frac{1}{2\tau}\right) - C_2 \left(\frac{1}{2\tau}\right) e^{-t/(2\tau)} - C_2 \left(\frac{1}{2\tau}\right) t e^{-t/(2\tau)} \left(-\frac{1}{2\tau}\right) = \\
&= -\frac{C_2}{\tau} e^{-t/(2\tau)} + C_2 \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 t e^{-t/(2\tau)} \quad .
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u izraz 3.4, uz upotrebu uvjeta za kritično gušenje $\omega_0 = 1/(2\tau)$, dobivamo:

$$-\frac{C_2}{\tau} e^{-t/(2\tau)} + C_2 \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 t e^{-t/(2\tau)} + \left(\frac{1}{\tau}\right) C_2 \left(1 - \frac{t}{2\tau}\right) e^{-t/(2\tau)} + \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 C_2 t e^{-t/(2\tau)} = 0$$

Pokratimo li zajedničke faktore u svim članovima (C_2 i eksponencijalni faktor), dobivamo:

$$-\frac{1}{\tau} + \frac{t}{4\tau^2} + \left(\frac{1}{\tau}\right) \left(1 - \frac{t}{2\tau}\right) + \frac{t}{4\tau^2} = 0 \quad ;$$

sad je lagano uočiti da izraz na lijevoj strani daje nulu, pa je diferencijalna jednadžba gušenog oscilatora (izraz 3.4) zadovoljena u limesu kritičnog gušenja i za drugo prepostavljeno rješenje. Opće rješenje je stoga:

$$u(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-t/(2\tau)} \quad . \tag{3.13}$$

Konstante C_1 i C_2 fiksiraju se početnim uvjetima - početnim otklonom $u(0)$ i početnom brzinom $v(0)$:

$$u(0) = C_1 \quad ,$$

$$v(0) = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = C_2 - \frac{1}{2\tau} C_1 \quad .$$

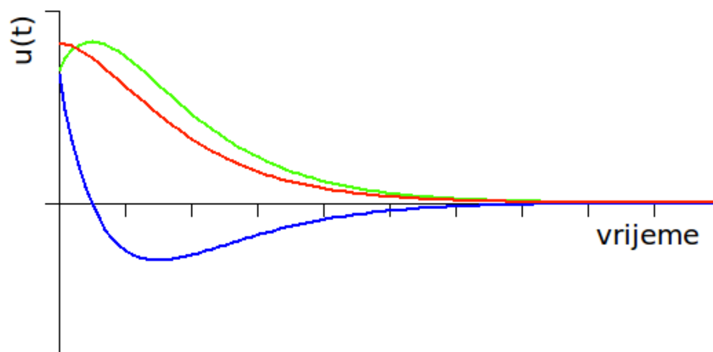
Odavdje dobivamo:

$$C_1 = u(0) \quad ,$$

$$C_2 = v(0) + \frac{1}{2\tau} u(0) \quad .$$

Opće rješenje 3.13 možemo stoga napisati ovako:

$$u(t) = u(0) \left(1 + \frac{t}{2\tau}\right) e^{-t/(2\tau)} + v(0)\ t\ e^{-t/(2\tau)} \quad . \tag{3.14}$$



Slika 3.2: Titranje s kritičnim gušenjem. Crveno: kritično gušenje oscilatora bez početne brznie. Zeleno: kritično gušenje oscilatora s početnom brzinom u smjeru od ravnoteže. Plavo: kritično gušenje oscilatora s početnom brzinom u smjeru k položaju ravnoteže.

Ako je početna brzina tijela $v(0)$ jednaka nuli, tada se početni pomak iz ravnoteže monotono smanjuje prema nuli - lako se pokazuje (deriviranjem izraza 3.14) da je u takvoj situaciji brzina tijela uvijek negativna. Taj slučaj odgovara crvenoj krivulji na slici 3.2. Ako se tijelu da pozitivna početna brzina ($v(0)$>0), njegovo gibanje je opisano zelenom krivuljom na slici 3.2; kao i u prethodnom slučaju, pomak $u(t)$ ne mijenja predznak, tj. nema osciliranja. Ako se tijelu da veća negativna početna brzina ($v(0)$>0) prema položaju ravnoteže, tako da vrijedi:

$$v(0) < -\frac{1}{2\tau}u(0) \quad \Rightarrow \quad C_2 < 0 \quad ,$$

$u(t)$ će promijeniti predznak u trenutku t=$-C_1/C_2$ (plava krivulja na slici 3.2). Nakon toga $u(t)$ trne prema nuli, bez oscilacija.

Demonstracijski pokus 3.2: kritično gušeni harmonijski oscilator - njihalo uronjeno u glicerin.

Važno uočiti: ponašanje oscilatora u ovisnosti o početnim uvjetima i jakosti gušenja.

---

c) Nadkritično gušenje

Ako se gušenje dodatno poveća, dobivamo:

$$\frac{1}{2\tau} > \omega_0 \quad \Rightarrow \quad 2\omega_0\tau < 1 \quad .$$

Opće rješenje 3.6 za dvije frekvencije ω_1 i ω_2 dano je s:

$$\omega_{1,2} = -\frac{1}{2\tau}\left[1 \mp \sqrt{1-(2\omega_0\tau)^2}\right] \quad ;$$

budući je izraz pod korijenom u ovom limesu pozitivan realan broj manji od 1, obje frekvencije (ω_1 i ω_2) su *negativni realni brojevi.* Koristimo općenito rješenje za $u(t)$ (izraz 3.7):

$$u(t) = C_1 e^{\omega_1 t} + C_2 e^{\omega_2 t} \quad .$$

Konstante C_1 i C_2 određujemo iz početnih uvjeta; veza je sljedeća:

$$u(0) = C_1 + C_2 \quad ,$$

$$v(0) = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = \left(\omega_1 C_1 e^{\omega_1 t} + \omega_2 C_2 e^{\omega_2 t}\right)_{t=0} = \omega_1 C_1 + \omega_2 C_2 \quad .$$

Dakako, tu vezu možemo okrenuti, te iz (eksperimentalno postavljenih) $u(0)$ i $v(0)$ naći konstante C_1 i C_2:

$$C_1 = \frac{v(0) - u(0)\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \quad ,$$

$$C_2 = \frac{v(0) - u(0)\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \quad .$$

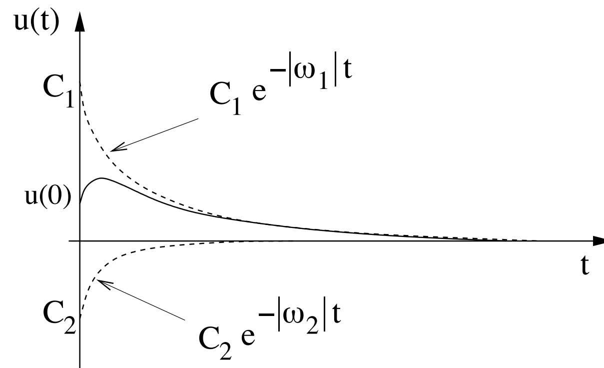
Uvrstimo li eksplicitne izraze za kružne frekvencije ω_1 i ω_2, dobivamo:

$$C_1 = \frac{v(0) + \frac{1}{2\tau}\left[1 + \sqrt{1 - (2\omega_0\tau)^2}\right] u(0)}{\frac{1}{\tau}\sqrt{1 - (2\omega_0\tau)^2}} \quad ,$$

$$C_2 = \frac{v(0) + \frac{1}{2\tau}\left[1 - \sqrt{1 - (2\omega_0\tau)^2}\right] u(0)}{-\frac{1}{\tau}\sqrt{1 - (2\omega_0\tau)^2}} \quad .$$

Ako su $u(0)$ i $v(0)$ pozitivni, C_1 će biti pozitivan, a C_2 negativan (uočite minus u nazivniku). Nadalje, vrijedit će i: $|C_2| < |C_1|$. Kako su i ω_1 i ω_2 negativni, a vrijedi i $|\omega_1|<|\omega_2|$, opće rješenje sastojat će se od sume dvije eksponencijalno padajuće funkcije, od kojih jedna (s $|\omega_1|$) sporije, a druga (s $|\omega_2|$) brže trne u vremenu.

Analizirajmo slučaj kada su $u(0)$ i $v(0)$ pozitivni (dakle, kada je tijelo gurnuto prema većim otklonima od ravnoteže) - ovisnost otklona u o vremenu u toj situaciji dana je na slici 3.3. Tijelo se giba slično kao i kod kritičnog gušenja uz iste početne uvjete (vidi slike 3.2).



Slika 3.3: Titranje s nadkritičnim gušenjem. Punom linijom dana je ovisnost otklona u o vremenu.

U slučaju kada je $v(0)$=0 također imamo ponašanje slično kao kod kritičnog gušenja, ali sa sporijim približavanjem ravnotežnom stanju. Ako tijelo pak gurnemo prema položaju ravnoteže dovoljno velikom (negativnom) brzinom, za koju vrijedi:

$$|v(0)| > \frac{1}{2\tau}\left[1 + \sqrt{1 - (2\omega_0\tau)^2}\right] u(0) \quad ,$$

dobivamo $C_1 < 0$, $C_2 < 0$, ali $|C_2| > |C_1|$. Pomak $u(t)$ će u jednom trenutku promijeniti predznak i utrnuti (opet slično kao u slučaju kritičnog gušenja).

Dakle, nadkritično gušenje vodi na vrlo slično ponašanje oscilatora kao i u slučaju kritičnog gušenja (u oba slučaja zapravo nema oscilacija!). Najbitnija razlika je ta da se kod kritičnog gušenja sistem vraća u ravnotežu na *najbrži* mogući način - nadkritično gušenje toliko guši gibanje oscilatora da je i njegov povratak u ravnotežu relativno spor. Iz definicije faktora dobrote Q (izraz 3.11) i činjenice da se sva energija oscilatora "potroši" već tijekom prvog perioda, vidimo da je faktor dobrote jednak jedinici i kod kritičnog i kod nadkritičnog gušenja.

Primjer jako gušenih oscilatora iz svakodnevnog života su recimo vrata koja su čvrstom oprugom vezana za okvir - opruga se nadkritično guši (fluidom u kučištu oko opruge), pa vrata ne osciliraju, već se po otvaranju sama polako vraćaju u položaj ravnoteže (tj. zatvaraju).

Demonstracijski pokus 3.3: nadkritično gušeni harmonijski oscilator: njihalo uronjeno u glicerin

Važno uočiti: ponašanje oscilatora u ovisnosti o početnim uvjetima.

3.1.2 Posebno rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe

Vratimo se nehomogenoj diferencijalnoj jednadžbi tjeranog oscilatora s gušenjem (izraz 3.3):

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad .$$

Pretpostavimo da je gušenje manje od kritičnog - samo tada i imamo oscilacije. Kao što je objašnjeno u uvodu, pretpostavljamo i da je vanjska sila periodička (frekvencijom ω). Provjerimo je li posebno (partikularno) rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe moguće uz pretpostavku ovakvog oblika:

$$u_p(t) = A\cos(\omega t - \phi) \quad , \tag{3.15}$$

gdje je A (standardno) amplituda titranja, a ϕ fazni pomak funkcije $u_p(t)$ u odnosu na vanjsku silu $F(t)$=F_0cos(ωt) - uz ovakav izbor predznaka u izrazu 3.15, ϕ možemo zvati "kašnjenjem" funkcije $u_p(t)$ za vanjskom silom $F(t)$. Logično je i fizički opravdano da reakcija oscilatora kasni za nametnutom silom (drugačiji izbor faznog pomeka ϕ doveo bi nas kasnije do njegovog negativnog predznaka, kao što je npr. napravljeno u prvom djelu berkeleyskog udžbenika, str. 129).

Uvrštavanjem ovog probnog rješenja u diferencijalnu jednadžbu, dobivamo:

$$-\omega^2 A\cos(\omega t - \phi) - \frac{\omega}{\tau}A\sin(\omega t - \phi) + \omega_0^2 A\cos(\omega t - \phi) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad .$$

Upotrebimo li trigonometrijsku relaciju za sinus (odnosno kosinus) razlike, nakon sređivanja dobivamo:

$$\left[-\omega^2\cos\phi + \frac{\omega}{\tau}\sin\phi + \omega_0^2\cos\phi\right] A\cos(\omega t) + \left[-\omega^2\sin\phi - \frac{\omega}{\tau}\cos\phi + \omega_0^2\sin\phi\right] A\sin(\omega t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad .$$

Ova jednadžba može biti zadovoljena *za svaki t* samo ako su faktori uz kosinus i sinus jednaki na lijevoj i desnoj strani jednadžbe (jer su u pitanju linearno nezavisne funkcije):

$$\left[-\omega^2\cos\phi + \frac{\omega}{\tau}\sin\phi + \omega_0^2\cos\phi\right] A = \frac{F_0}{m} \quad ,$$

$$-\omega^2 \sin\phi - \frac{\omega}{\tau}\cos\phi + \omega_0^2 \sin\phi = 0 \quad .$$

Dobiveni sistem jednadžbi omogućava nam da jednoznačno odredimo veličine A i ϕ. Iz druge jednadžbe dobivamo:

$$\text{tg}\ \phi = \frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad . \tag{3.16}$$

Period tangensa jednak je π, pa je dovoljno ograničiti se na vrijednosti ϕ iz domene $[0,\pi]$ - na toj je domeni $\sin\phi$ uvijek pozitivan, a $\cos\phi$ uvijek istog predznaka kao tangens. Veći fazni pomak ϕ ni fizički nema smisla - pomak oscilatora kasni za pogonskom silom, no ne toliko da se tijelo započne pomicati u nekom smjeru nakon što je sila već promijenila smjer u suprotni.

Iz tangensa neke veličine, možemo naći njen sinus i kosinus upotrebom poznatih trigonometrijskih relacija[2]:

$$\sin\phi = \frac{\pm\text{tg}\ \phi}{\sqrt{1+\text{tg}^2\,\phi}} \quad ,$$

$$\cos\phi = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\,\phi}} \quad .$$

Dalje redom imamo:

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\,\phi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2-\omega^2}\right)^2}} = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\omega/\tau)^2}} \quad ,$$

$$\sin\phi = \text{tg}\ \phi\cdot\cos\phi = \frac{\omega/\tau}{\omega_0^2-\omega^2}\cdot\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\omega/\tau)^2}} = \frac{\omega/\tau}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\omega/\tau)^2}} \quad .$$

Pri vađenju korijena (u računu za kosinus) izabrali smo onaj predznak u brojniku koji zadovoljava uvjet da su kosinus i tangens istog predznaka. Uvrstimo li tako izračunat sinus i kosinus u prvu jednadžbu dobivenog sustava, slijedi:

$$\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\phi + \frac{\omega}{\tau}\sin\phi\right]A = \frac{F_0}{m} \quad ,$$

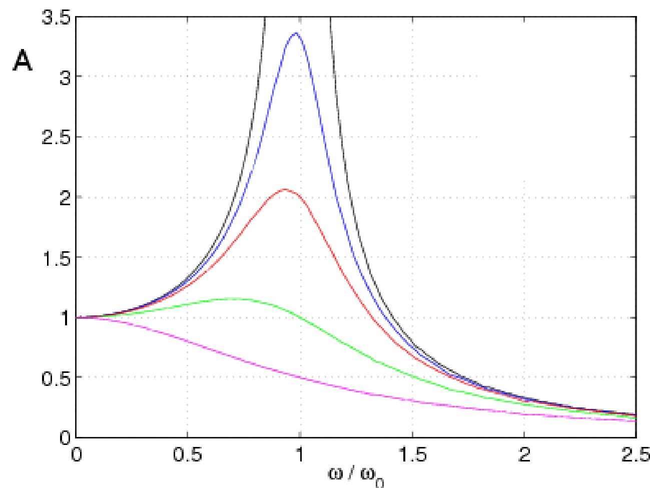
$$\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\omega/\tau)^2}} + \frac{\omega}{\tau}\frac{\omega/\tau}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\omega/\tau)^2}}\right]A = \frac{F_0}{m} \quad ,$$

$$\left[\frac{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\omega/\tau)^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\omega/\tau)^2}}\right]A = \frac{F_0}{m} \quad ,$$

$$A = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\omega/\tau)^2}} \quad . \tag{3.17}$$

Možemo **zaključiti**: funkcija $u_p(t)$ (izraz 3.15) uistinu jest (posebno) rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe 3.3 ako konstante ϕ i A imaju vrijednosti dane izrazima 3.16 i 3.17. Dakle, našli smo posebno rješenje - ono je posve definirano izrazima 3.15 3.16 i 3.17.

Nekoliko stvari je važno uočiti u dobivenom rješenju - kao prvo, amplituda A se *ne smanjuje* eksponencijalno s vremenom (već je posve neovisna o njemu), kao što smo imali kod gušenog oscilatora bez pogonske sile. Drugim riječima, titranje otklona $u_p(t)$ opstaje u vremenu toliko dugo dok postoji periodična vanjska sila, i pri tome mu amplituda ostaje stalna. Iz zakona očuvanja energije, zaključujemo da se pri tome sva energija unešena pogonskom silom troši na savladavanje



Slika 3.4: Amplituda tjeranog harmonijskog oscilatora kao funkcija "frekvencije vođenja" (frekvencije vanjske, pogonske sile), za različite vrijednosti relaksacijskog vremena τ (što je τ veći, viši je i maksimum krivulje, te je položaj maksimuma bliži frekvenciji ω_0).

sile gušenja (to ćemo detaljnije diskutirati kasnije).

Za dani oscilator (tj. zadani m, τ i ω_0), amplituda A ovisi o frekvenciji pogonske sile ω na način prikazan na slici 3.4. Kada je ta frekvencija (ω) bliska prirodnoj frekvenciji oscilatora (ω_0), amplituda postaje jako velika. Maksimalna amplituda postiže se kada je nazivnik izraza 3.17 minimalan - ekstrem izraza pod korijenom naći ćemo standardno deriviranjem i izjednačavanjem s nulom:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\omega/\tau)^2\right]=0 \quad ,$$

$$-2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cdot 2\omega+2\frac{\omega}{\tau}\cdot\frac{1}{\tau}=0 \quad ,$$

$$-2\omega_0^2+2\omega^2+\frac{1}{\tau^2}=0 \quad ,$$

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\frac{1}{2\tau^2}}=\omega_0\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2\omega_0^2\tau^2}} \quad .$$

Dobivena frekvencija na prvi pogled liči na frekvenciju gušenih oscilacija ω_g, no od nje se ipak razlikuje za faktor 2 u nazivniku razlomka pod korijenom. Lako je provjeriti da nađeni ekstrem odgovara minimumu nazivnika, tj. maksimumu čitavog razlomka. Dobivena frekvencija nije identična, ali je bliska frekvenciji ω_0 kada vrijedi $\omega_0\tau \gg 1$ (uočite da je produkt $\omega_0\tau$ u limesu slabog gušenja jednak faktoru dobrote - izraz 3.12).

Krivulje poput onih na slici 3.4 nazivaju se rezonantnim krivuljama - kada amplituda titranja drastično raste na frekvencijama bliskim vlastitoj, kaže se da je vanjaska sila "u rezonanciji" s harmonijskim oscilatorom. Treba naglasiti da se amplituda pogonske sile F_0 u prethodnom razmatranju držala konstantnom - do promjene amplitude titranja oscilatora dolazi isključivo zbog promjene *frekvencije* pogonske sile naspram vlastite frekvencije oscilatora. Ako povećamo i amplitudu pogonske sile F_0, po izrazu 3.17 rezonantna krivulja se samo množi većim faktorom, no njen oblik ostaje nepromjenjen.

[2]Bronštejn *et al.*, str. 80.

Razlika frekvencija $\Delta\omega$ između točaka rezonantne krivulje kojima odgovara amplituda $A/\sqrt{2}$ standardno se definira kao **širina rezonancije**. Budući da je snaga proporcionalna s A^2, spomenutim točkama odgovara snaga koja je jednaka polovici maksimalne. Nađimo analitički izraz za širinu rezonance u limesu slabog gušenja, kada za položaj maksimuma približno vrijedi $\omega = \omega_0$ (općenit račun je prilično kompliciran, a ne vodi na dodatne korisne informacije). U navedenom limesu, maksimum amplitude dan je s:

$$A = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{0 + (\omega_0/\tau)^2}} \quad .$$

Amplituda će se smanjiti za faktor $\sqrt{2}$ kada suma ispod korijena postane dvostruko veća; tj. kada vrijedi:

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 = \left(\frac{\omega_0}{\tau}\right)^2 \quad .$$

Ako je rezonanca uska (a u limesu slabog gušenja jest), približno imamo:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0 \frac{\Delta\omega}{2} \quad .$$

Spajanjem prethodne dvije jednadžbe dobivamo:

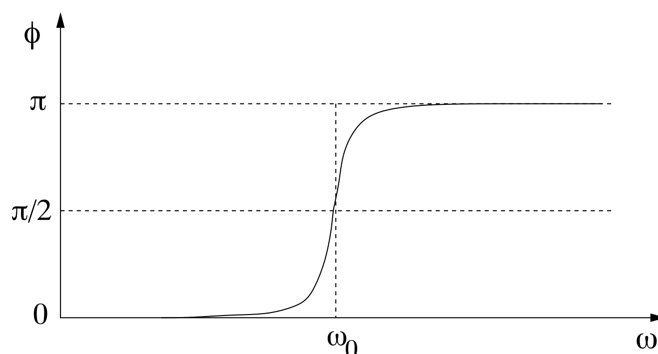
$$\omega_0 \cdot \Delta\omega \approx \omega_0^2 - \omega^2 = \frac{\omega_0}{\tau} \quad ,$$

iz čega slijedi:

$$\Delta\omega \approx \frac{1}{\tau} \quad . \tag{3.18}$$

Uočite vrlo važan zaključak: kada relaksacijsko vrijeme τ postaje ekstremno veliko, tj. kada je gušenje ekstremno slabo (odnosno faktor dobrote Q vrlo velik), tada je rezonancija ektremno uska. Smanjivanjem τ, rezonancija se širi, postaje asimetrična i maksimum se odmiče iz položaja $\omega = \omega_0$ (vidi sliku 3.4).

Osim ovisnosti amplitude titranja o frekvenciji pogonske sile (prikazanoj na slici 3.4), zanimljivo je pogledati i kako se fazni pomak ϕ mijenja kao funkcija frekvencije pogonske sile ω. To je dano izrazom 3.16 i prikazano na slici 3.5.



Slika 3.5: Fazni pomak ϕ kao funkcija frekvencije pogonske sile ω.

Sa slike se vidi da je fazni pomak praktički jednak nuli za frekvencije ω bitno manje od vlastite frekvencije ω_0 - kažemo da oscilator "titra u fazi" s pogonskom silom. Oko $\omega \approx \omega_0$ faza prelazi s ϕ=0 na $\phi=\pi$, da bi za veće frekvencije oscilacije i vanjska sila bile u protufazi.

3.1.3 Ukupno rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe

Kombiniranjem općeg rješenja homogene diferencijalne jednadžbe i posebnog rješenja nehomogene, dobivamo ukupno rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe:

$$u(t) = A_h e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\omega_g t - \phi_h) + A\cos(\omega t - \phi) \quad . \tag{3.19}$$

Dakle, u početku (za $t<\tau$) imamo superpoziciju titranja na frekvencijama ω_g i ω. Opažaju se i udari. Nakon dovoljno dugo vremena ($t \gg \tau$), slobodne oscilacije vlastitom frekvencijom ω_g trnu i ostaje samo prisilno titranje frekvencijom ω (tzv. stacionarno stanje):

$$u(t) = A\cos(\omega t - \phi) \quad . \tag{3.20}$$

Vrijeme između početka titranja i postizanja stacionarnog stanja standardno nazivamo "tranzijentom" ili "prijelazom".

Demonstracijski pokus 3.4: tjerani harmonijski oscilator - početni udari i ponašanje sustava u vremenu

Važno uočiti: prelazak u stacionarno stanje.

Ako frekvenciju vanjske sile u nekom trenutku promijenimo ($\omega \to \omega$'), opet se pojavljuju udari uslijed superpozicije titranja frekvencijom ω_0 i ω'. Nakon dodatnog vremena Δt ($\Delta t \gg \tau$) opet dobivamo stacionarno stanje s novom frekvencijom ω' i novom amplitudom A'.

Demonstracijski pokus 3.5: tjerani harmonijski oscilator i rezonancija - promjena frekvencije

Važno uočiti: razlika između spore i nagle promjene frekvencije pogonske sile.

Pogledajmo karakteristične slučajeve posebnog rješenja nehomogene diferencijalne jednadžbe 3.19 (odnosno stacionarnog limesa ukupnog rješenja).

I) daleko ispod rezonancije - frekvencija pogonske sile ω puno je manja od vlastite frekvencije ω_0:

$$\omega \ll \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \quad .$$

U ovom limesu vrijedi:

$$A = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2}} \to \frac{F_0}{m\omega_0^2} \quad ,$$

$$\text{tg}\ \phi = \frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} \to \frac{\omega}{\tau\omega_0^2} \ll \frac{1}{\tau\omega_0} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \phi \approx 0 \quad .$$

U ovom limesu kašnjenje ϕ je, dakle, posve zanemarivo i titranje je praktički u fazi s vanjskom silom:

$$u(t) \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cos(\omega t) \quad .$$

II) rezonancija - frekvencija vanjske sile jednaka je vlastitoj frekvenciji:

$$\omega = \omega_0 \quad .$$

Tada vrijedi:

$$A = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2}} \to \frac{F_0 \tau}{m\omega_0} \quad , \tag{3.21}$$

$$\mathrm{tg}\ \phi = \frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} \to \infty \quad \Rightarrow \quad \phi \approx \frac{\pi}{2} \quad .$$

Titranje za vanjskom silom zaostaje (kasni) za $\pi/2$:

$$u(t) = \frac{F_0 \tau}{m\omega_0} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0 \tau}{m\omega_0} \sin(\omega t) \quad .$$

U fazi s vanjskom silom u ovom se limesu nalazi brzina tijela:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{F_0 \tau}{m} \cos(\omega t) \quad .$$

Vanjska sile rezonantno "gura" česticu tako da joj povećava brzinu.

Pogledajmo snagu koju vanjska sila prenosi na tijelo; nju ćemo naći usrednjavanjem u vremenu po periodu T:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) v(t) \mathrm{d}t \quad .$$

Uvrstimo li izraze za $F(t)$ i upravo izračunatu brzinu $v(t)$ dobivamo:

$$\langle P \rangle = \frac{F_0^2 \tau}{m\omega_0} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) = \frac{F_0^2 \tau}{2m} \quad .$$

Ova snaga koju unosi vanjska sila troši se na trenje, pa amplituda titranja ostaje stalna u stacionarnom stanju.

III) daleko iznad rezonancije - frekvencija pogonske sile ω puno je veća od vlastite frekvencije ω_0:

$$\omega \gg \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \quad .$$

U ovom limesu ($\omega \to \infty$) vrijedi:

$$A = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2}} \to \frac{F_0}{m\omega^2} \to 0 \quad ,$$

$$\mathrm{tg}\ \phi = \frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} \to -\frac{1}{\tau\omega} \to (-)0 \quad \Rightarrow \quad \phi \approx \pi \quad .$$

Ovakvo titranje je praktički u protufazi s vanjskom silom, a amplituda mu je vrlo malena:

$$u(t) \approx \frac{F_0}{m\omega^2} \cos(\omega t - \pi) = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos(\omega t) \quad .$$

Demonstracijski pokus 3.6: tjerani harmonijski oscilator i rezonancija - karakteristični slučajevi I, II i III

Važno uočiti: fazni odnosi i amplitude u raznim slučajevima.

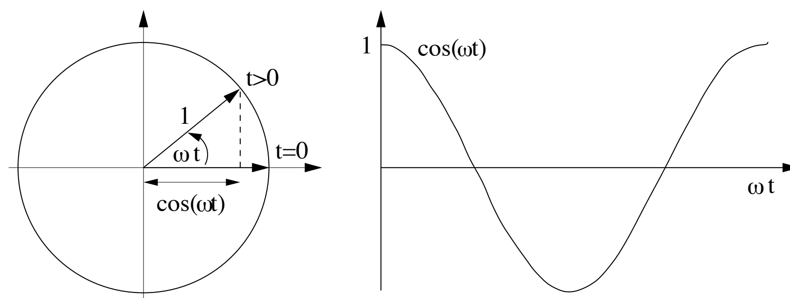
Demonstracijski pokus 3.7: fizičko njihalo koje tjera na titranje niz matematičkih njihala različite duljine.

Važno uočiti: nakon tranzijenta, velikom amplitudom titra samo njihalo čija je frekvencija jednaka frekvenciji titranja fizičkog njihala (dok se titranje ostalih njihala gasi).

U sljedećem ćemo potpoglavlju istu diferencijalnu jednadžbu (tjeranog oscilatora s gušenjem) riješiti uvođenjem tzv. metode rotirajućih vektora, i dakako, dobiti iste rezultate kao u izrazima 3.16 i 3.17. Zatim ćemo problem razmotriti i u formalizmu metode kompleksnih brojeva, i time dati pregled svih standardnih pristupa problemu tjeranog oscilatora s gušenjem. Paralelno ćemo uvesti i važne nove pojmove u opisu titranja, kao što je npr. impedancija oscilatora.

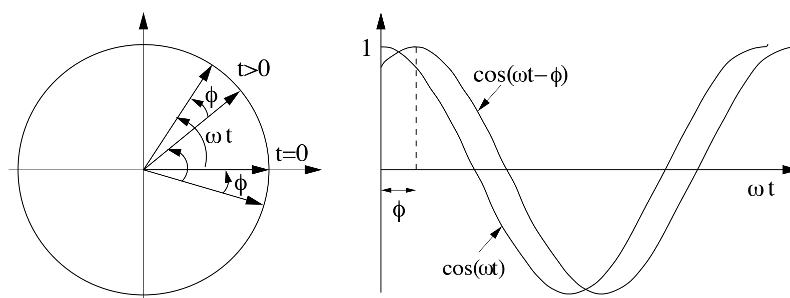
3.1.4 Opis titranja metodom rotirajućih vektora

Prisjetimo se sada metode koju smo prvi put uveli na "Općoj fizici 2" radi diskusije izmjeničnih električnih struja: metode rotirajućih vektora. Vremenski promjenljive trigonometrijske funkcije možemo vizualizirati i kao projekciju jediničnog vektora koji rotira kutnom brzinom ω; uzmemo li za primjer funkciju $\cos(\omega t)$, ova je ideja ilustrirana na slici 3.6.



Slika 3.6: Metoda rotirajućih vektora.

Uspoređujemo li dvije funkcije, među kojima je fazni pomak ϕ, koristimo dva rotirajuća vektora, kao na slici 3.7. Ako oba rotirajuća vektora imaju istu kutnu brzinu ω (a to je slučaj koji nas najčešće zanima), kut između dva vektora ostaje u vremenu isti (i jednak ϕ).



Slika 3.7: Metoda rotirajućih vektora: primjena na dvije funkcije razmaknute za fazni kut ϕ.

Primijenimo sada ovu metodu na vremenski promjenljive veličine u harmonijskom oscilatoru. Jedan od rotirajućih vektora prestavljat će vanjsku silu:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad ,$$

a drugi pomak čestice iz položaja ravnoteže:

$$u(t) = A \cos(\omega t - \phi) \quad .$$

Te dvije veličine moraju zadovoljiti diferencijalnu jednadžbu 3.3:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad .$$

Uvrštavanjem $u(t)$ u diferencijalnu jednadžbu dobivamo:

$$-\omega^2 A \cos(\omega t - \phi) - \frac{1}{\tau}\omega A \sin(\omega t - \phi) + \omega_0^2 A \cos(\omega t - \phi) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad .$$

Želimo li ovu jednadžbu razmatrati metodom rotirajućih vektora, sve njene članove moramo zapisati preko iste trigonometrijske funkcije (na početku poglavlja smo se odlučili na kosinus); da bi to učinili trebamo iskoristiti sljedeću trigonometrijsku relaciju:

$$\sin\alpha = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \quad .$$

Sinus iz drugog člana gornje diferencijalne jednadžbe transformiramo stoga ovako:

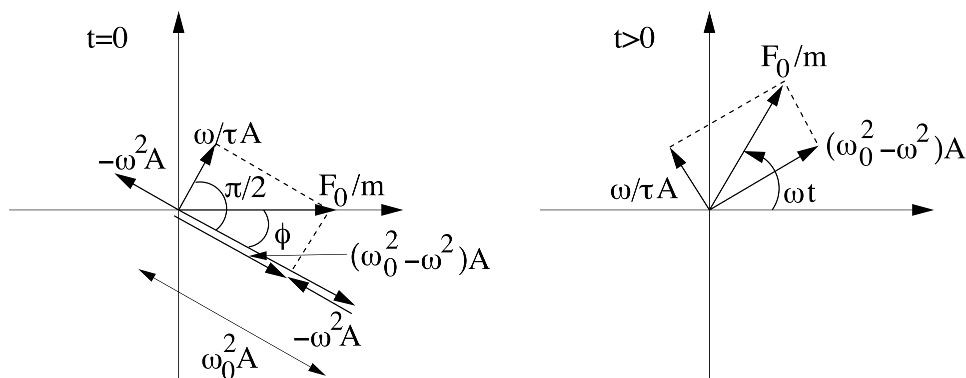
$$\sin(\omega t - \phi) = \cos\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right) \quad .$$

Diferencijalna jednadžba sada se može zapisati ovako:

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A \cos(\omega t - \phi) + \frac{\omega}{\tau} A \cos\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad . \tag{3.22}$$

Tri člana ove jednadžbe sada možemo shvatiti kao projekcije triju rotirajućih vektora. Sva tri vektora rotiraju istom kutnom brzinom ω, ali imaju različite amplitude i faze.

I) Razmotrimo najprije vektorski prikaz za slučaj kada smo "ispod rezonancije", $\omega < \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$. Vektorski dijagram dan je tada na slici 3.8.



Slika 3.8: Metoda rotirajućih vektora - primjena na jednadžbu 3.22, za slučaj "ispod rezonancije": $\omega < \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$.

Na lijevoj strani slike 3.8 prikazano je da zbroj vektora $-\omega^2 A$, $\omega_0^2 A$ i $\omega A/\tau$ daje rezultantni vektor F_0/m. Rotiranjem vektora u vremenu mijenjaju se njihove projekcije na horizontalnu os (slika 3.8, desna strana). Međutim, zbroj projekcija pojedinih vektora uvijek je jednak projekciji rezultantnog vektora (jer svi vektori rotiraju istom kutnom brzinom). Razmotrimo značenje pojedinih rotirajućih vektora na slici 3.8:
$-\omega^2 A$ ... dolazi od akceleracije;
$\omega_0^2 A$ ... dolazi od elastične povratne sile;
$\omega A/\tau$ ... dolazi od gušenja.
Prema tome, vektorski zbroj možemo interpretirati na sljedeći način: vanjska sila služi dijelom za davanje akceleracije tijelu, dijelom za savladavanje povratne sile opruge i dijelom za savladavanje trenja.

U slučaju koji smo razmatrali, kada vrijedi $\omega < \omega_0$ (ispod smo rezonancije), možemo reći i da se dio povratne sile opruga koristi za davanje akceleracije tijelu, dok vanjska sila savladava razliku $(\omega_0^2 - \omega^2)\, A$ i trenje $\omega A/\tau$. U limesu $\omega \ll \omega_0$ (daleko ispod rezonancije), trenje $\omega A/\tau$ postaje zanemarivo, te fazni kut ϕ također postaje malen; titranje $u(t)$ je praktički u fazi s vanjskom silom $F(t)$. Tada vrijedi $F_0/m \approx \omega_0^2 A$; tj. vanjska sila uglavnom služi za savladavanje elastične povratne sile. Dakle, kada je frekvencija prisilnih oscilacija daleko niža od rezonantne, u odzivu harmonijskog oscilatora dominira **elastičnost** opruge (ili opruga).

Bez obzira gdje bili s frekvencijom ω u odnosu na rezonanciju, između vektora $(\omega_0^2 - \omega^2)\, A$ i $\omega A/\tau$ nalazi se kut $\pi/2$, pa vrijedi Pitagorin poučak:

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 A^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 A^2 = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \quad .$$

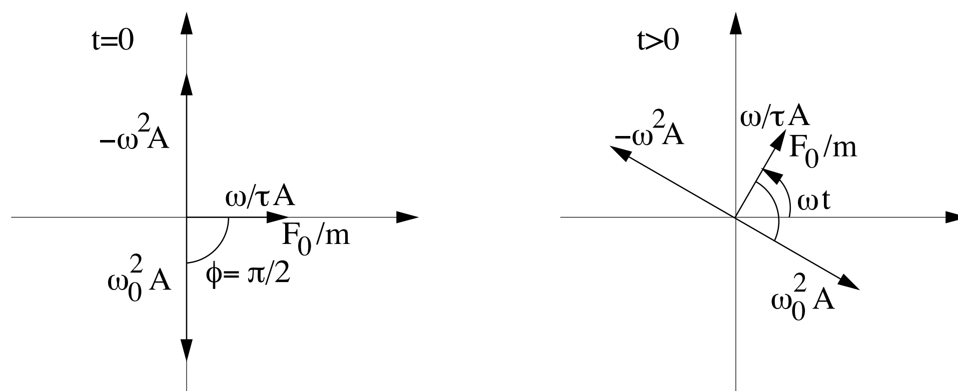
Izrazimo li odavdje A, dobivamo dakako isti rezultat kao i "klasičnom" metodom rješavanja diferencijalne jednadžbe (izraz 3.17):

$$A = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2}} \quad .$$

Iz slike 3.8 također se vidi:

$$\mathrm{tg}\ \phi = \frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad ;$$

što je također identično rezultatu dobivenom prije (izraz 3.16).



Slika 3.9: Metoda rotirajućih vektora - primjena na jednadžbu 3.22, za slučaj rezonancije: $\omega \approx \omega_0$.

II) Razmotrimo sada slučaj rezonancije, $\omega \approx \omega_0$. Tada vrijedi:

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A = 0 \quad ;$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \quad .$$

Ova situacija je u formalizmu rotirajućih vektora prikazana na slici 3.9.

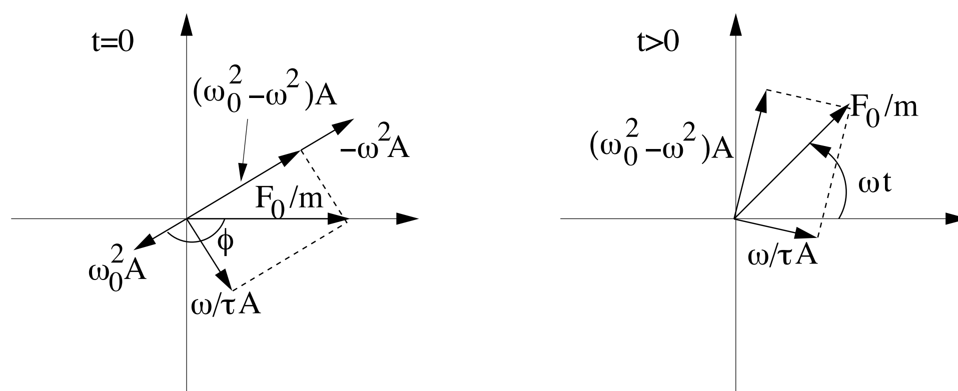
Iz slike 3.9 odmah možemo iščitati:

$$\frac{\omega_0}{\tau} A = \frac{F_0}{m} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{F_0 \tau}{m\omega_0} \quad ,$$

što je identično razultatu dobivenom prije (izraz 3.21) - u rezonanciji je amplituda titranja najveća.

U rezonanciji je povratna sila opruge $\omega_0^2 A$ jednaka po iznosu onome što je potrebno za davanje akceleracije tijelu $\omega^2 A$. Drugim riječima, vanjska sila nije potrebna za davanje akceleracije tijelu, već se u cijelosti koristi za savladavanje trenja. Harmonijski oscilator se tada ponaša kao **otporni** sustav.

III) Razmotrimo na kraju i slučaj kada smo frekvencijom prisilne sile iznad rezonancije, $\omega > \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$. Ova situacija je u formalizmu rotirajućih vektora prikazana na slici 3.10.



Slika 3.10: Metoda rotirajućih vektora - primjena na jednadžbu 3.22, za slučaj “iznad rezonancije”: $\omega > \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$.

U ovom slučaju pomak iz ravnoteže $u(t)$ je u fazi s $\omega_0^2 A$ i kasni za silom za $\phi > \pi/2$. Povratna elastična sila opruge više nije dovoljna za davanje akceleracije tijelu (brzo titranje podrazumijeva veliku akceleraciju!), pa veći dio vanjske sile služi upravo za davanje akceleracije tijelu. Kada harmonijski oscilator prisilno titra frekvencijom iznad rezonantne, u njegovu ponašanju dominira svojstvo **inercije** tijela.

3.1.5 Impedancija harmonijskog oscilatora

Riječ *impedancija* ima latinski korijen: *lat.* ”impedimentum” znači zapreka, prepreka ili smetnja. U fizici ovim se pojmom izražava otpor harmonijskog oscilatora uspostavljanju titranja frekvencijom ω, nametnutom vanjskom (prisilnom ili pogonskom) silom $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$. Impedancija (standardna oznaka: Z) se formalno definira tako da povezuje vanjsku silu i brzinu koju tijelo postiže kod titranja:

$$F_0 = Z v_0 \quad , \tag{3.23}$$

gdje je F_0 amplituda vanjske sile, a v_0 amplituda brzine tijela koje oscilira. Trenutačnu brzinu tijela $v(t)$ nalazimo deriviranjem po vremenu otklona od položaja ravnoteže - kao opće rješenje za otklon koristimo izraz 3.20 za stacionarno stanje:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\omega A \sin(\omega t - \phi) = \omega A \cos(\omega t - \phi + \pi/2) \quad . \tag{3.24}$$

Dakle, amplituda osciliranja brzine v_0 jednaka je umnošku ispred trigonometrijske funkcije u gornjem izrazu:

$$v_0 = \omega A \quad .$$

Nadalje treba uočiti da brzina ima fazni pomak $\pi/2$ *ispred* otklona iz položaja ravnoteže $u(t)$. Brzina je najveća kada tijelo prolazi kroz položaj ravnoteže i tada ima iznos v_0.

Uvedemo li u gornji izraz za amplitudu brzine, prije izveden rezultat za A (izraz 3.17), dobivamo:

$$v_0 = \omega A = \omega \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2}} \quad .$$

Odavdje možemo izraziti amplitudu vanjske sile F_0:

$$F_0 = \frac{m}{\omega}\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2} \cdot v_0 \quad .$$

Usporedbom s definicijskim izrazom za impedanciju (3.23), dobivamo:

$$Z = \frac{m}{\omega}\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2} \quad . \tag{3.25}$$

Što je impedancija veća, bit će manja amplituda brzine v_0 uz istu vanjsku silu F_0. Drugim riječima, ako je impedancija veća, harmonijski oscilator pruža veći otpor uspostavi titranja, pa je rezultantna amplituda brzine v_0 manja.

Za dani harmonijski oscilator (tj. za zadane veličine m, ω_0 i τ), impedancija se mijenja ovisno o frekvenciji ω koju nameće vanjska sila (izraz 3.25). Ako je ta frekvencija puno manja od rezonantne ($\omega \ll \omega_0$), tada impedancija postaje jako velika:

$$Z = \frac{m}{\omega}\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{m\omega_0^2}{\omega} \quad \rightarrow \quad \infty \quad .$$

Ako je frekvencija vanjske sile u rezonanciji s vlastitom frekvencijom ($\omega = \omega_0$), tada je impedancija najmanja moguća:

$$Z = \frac{m}{\omega}\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2} = \frac{m}{\omega_0}\sqrt{(\omega_0/\tau)^2} = \frac{m}{\tau} \quad .$$

Ako je pak frekvencija vanjske sile puno veća od rezonantne ($\omega \gg \omega_0$), tada impedancija ponovno postaje jako velika:

$$Z = \frac{m}{\omega}\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{m}{\omega}\sqrt{\omega^4 + (\omega/\tau)^2} \approx m\omega \quad \rightarrow \quad \infty \quad .$$

Promotrimo još malo impedanciju u rezonanciji, tj. kad vrijedi $Z = m/\tau$. Ako u harmonijskom oscilatoru promijenimo tijelo koje titra i stavimo veću masu m, impedancija se povećava. To znači da je teže uspostaviti rezonantno titranje ako je masa tijela veća. Također možemo promijeniti jakost gušenja. Ako npr. gušenje pojačamo, relaksacijsko vrijeme τ se smanji, pa impedancija postane veća. To opet znači da je teže uspostaviti titranje uz veće gušenje.

Za pojam impedancije za sada je još važno naglasiti da veličina Z u izrazima 3.23 i 3.25 predstavlja njen apsolutni iznos. Ako nas zanimaju fazni odnosi, moramo naći komponente impedancije u fazi s brzinom i pomakom; to će biti napravljeno u kasnijim potpoglavljima.

3.1.6 Apsorpcijska i disperzijska amplituda

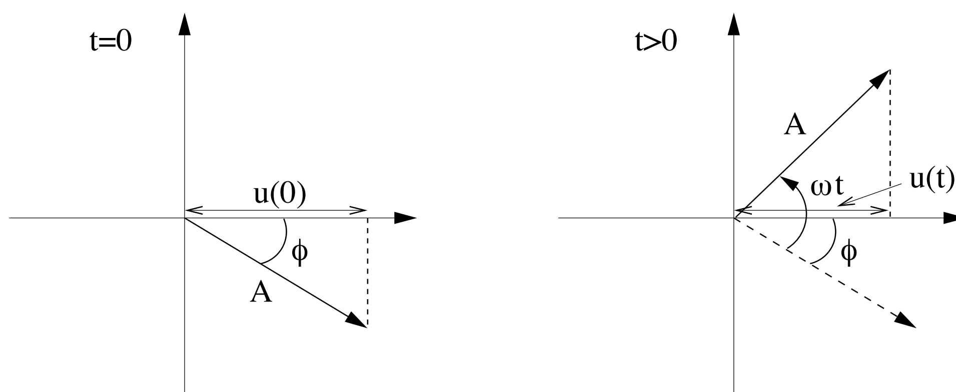
Neka je pogonska sila, kao i prije, dana izrazom:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad .$$

Umjesto standarnog zapisa otklona iz položaja ravnoteže preko amplitude titranja A i faznog pomaka ϕ:

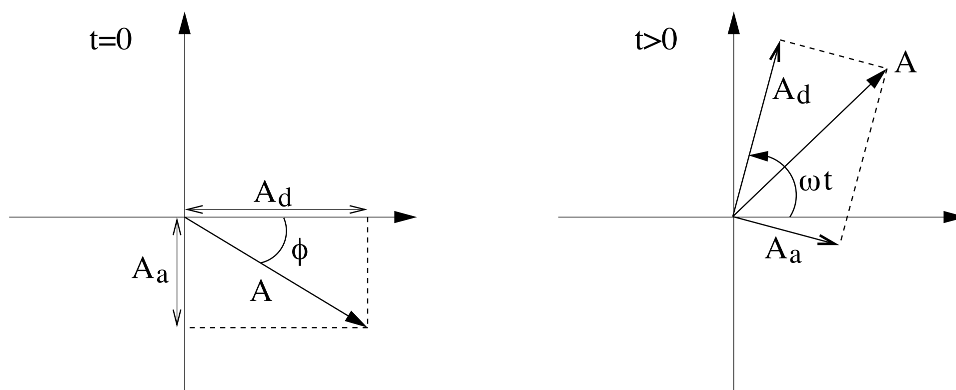
$$u(t) = A \cos(\omega t - \phi) \quad ,$$

titranje se može ekvivalentno parametrizirati i preko drugih veličina. Krenimo npr. od prikaza funkcije $u(t)$ pomoću rotirajućeg vektora duljine A danog na slici 3.11.



Slika 3.11: Metoda rotirajućih vektora: prikaz otklona u početnom trenutku, $u(0)$=$A\cos\phi$ (lijevo), i u proizvoljnom trenutku t, $u(t)$=$A\cos(\omega t - \phi)$ (desno).

Vektor A u početnom trenutku možemo rastaviti na dvije komponente s duljinama A_d i A_a, kao što je prikazano na lijevoj strani slike 3.12. Komponentu A_d=$A\cos\phi$ zvat ćemo **disperzijskom amplitudom**, a komponentu A_a=$A\sin\phi$ **apsorpcijskom amplitudom**, iz razloga koji će biti jasniji kasnije. Ovaj se rasrav čini imajući na pameti smjer rotirajućeg vektora sile: disperzijska komponenta usmjerena je duž tog vektora, dok je rotirajući vektor apsorpcijske komponente u svakom trenutku okomit na rotirajući vektor sile.



Slika 3.12: Metoda rotirajućih vektora: rastavljanje vektora A na komponente s duljinama A_d i A_a.

Tako konstruiranom rastavu vektora A na dvije komponente dozvolit ćemo da rotira kao cjelina, kao što je prikazano na desnoj strani slike 3.12. Zbroj disperzijske i apsorpcijske komponente uvijek

je jednak vektoru A, a isto vrijedi i za njihove projekcije na horizontalnu os:

$$u(t) = A_d \cos(\omega t) + A_a \cos(\omega t - \pi/2) = A_d \cos(\omega t) + A_a \sin(\omega t) \quad .$$

Uz ovako definirane komponente vektora A, vidimo da je disperzijska komponenta A_d uvijek u fazi s vanjskom silom $F_0 \cos(\omega t)$, dok apsorpcijska komponenta A_a kasni za vanjskom silom za $\pi/2$.

Gornji izraz se može, dakako, dobiti i bez upotrebe metode rotirajućih vektora; dovoljno je jednostavno primijeniti trigonometrijsku formulu za razliku kutova:

$$u(t) = A\cos(\omega t - \phi) = A\cos\phi\cos(\omega t) + A\sin\phi\sin(\omega t) = A_d\cos(\omega t) + A_a\sin(\omega t) \quad .$$

Iznose dvaju amplituda lako dobivamo iz prije izvedenih izraza (vidi str. 49 ili npr. sliku 3.8):

$$A = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2}} \quad ,$$

$$\cos\phi = \frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A}{F_0/m} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2}} \quad ,$$

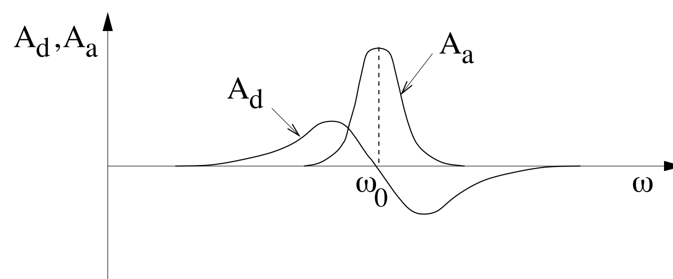
$$\sin\phi = \frac{A\omega/\tau}{F_0/m} = \frac{\omega/\tau}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2}} \quad .$$

Korištenjem ovih izraza dobivamo:

$$A_d = A\cos\phi = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2} \quad , \tag{3.26}$$

$$A_a = A\sin\phi = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\omega/\tau}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2} \quad . \tag{3.27}$$

Ovisnost ovih amplituda o frekvenciji vanjske sile prikazana je na slici 3.13.



Slika 3.13: Disperzijska i apsorpcijska amplitude kao funkcije frekvencije vanjske sile ω.

Proučavanjem titranja najčešće lako određujemo parametre A i ϕ, dok to ne vrijedi za A_d i A_a - no pokazat ćemo da ti parametri imaju jednostavan i koristan fizikalni smisao. Pogledajmo prvo uobičajene tri različite situacije s obzirom na rezonanciju:

I) $\omega \ll \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$ (ispod rezonancije):
$A_d > 0$ (titranje u fazi), $A_a \approx 0$.

II) $\omega \approx \omega_0$ (u rezonanciji):
$A_d=0$, $A_a \approx \frac{F_0 \tau}{m\omega_0}$ (maksimalna amplituda).

III) $\omega \gg \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$ (iznad rezonancije):
$A_d<0$ (titranje u protufazi), $A_a \approx 0$.

Zaključujemo: apsorpcijska amplituda A_a je uvijek pozitivna, no svuda je osim u blizini rezonancije zanemarivo malena; disperzijska amplituda A_d pak prelazi s pozitivnih na negativne vrijednosti pri frekvenciji $\omega=\omega_0$, dok je za vrlo male i vrlo velike frekvencije ω također zanemarivo malena.

Promotrimo još slučaj II), u limesu iščezavajućeg gušenja ($1/\tau \to 0$). U toj situaciji amplituda titranja teži k beskonačnosti, što je u realnoj sitauciji dakako nemoguće - rast amplitude tada prestaje lomljenjem oscilatora. Primjer takvog ponašanja je čuveni raspad mosta u Tacomi 1940. godine - pod utjecajem vjetra prisilno podrhtavanje mosta došlo je u rezonanciju s vlastitim i most se srušio.

Sada ćemo pokazati smisao naziva "apsorpcijska" i "disperzijska" amplituda za proučavane parametre. Izračunajmo srednju snagu koju vanjska pogonska sila predaje tijelu:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)v(t)\mathrm{d}t \quad ,$$

gdje brzinu ovaj put parametriziramo preko A_a i A_d:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\omega A_d \sin(\omega t) + \omega A_a \cos(\omega t) \quad .$$

Iz ovako zapisane brzine vidimo da se ona sastoji od dvije komponente, od kojih je druga (ωA_a) u fazi s vanjskom silom $F_0 \cos(\omega t)$, a prva je pomaknuta u fazi za $\pi/2$. Usrednjavanjem dobivamo:

$$\langle P \rangle = -\omega A_d F_0 \frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\sin(\omega t))\mathrm{d}t + \omega A_a F_0 \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\mathrm{d}t \quad .$$

Prvi integral u ovom izrazu jednak je nuli (vidi str. 44), dok je drugi jednak 1/2, pa kao konačan rezultat dobivamo:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\omega F_0 A_a \quad . \tag{3.28}$$

Dakle, snaga koju harmonijski oscilator dobiva od pogonske sile ovisi samo o apsorpcijskoj komponenti amplitude - od tuda i ime "apsorpcijska amplituda" za A_a.

Disperzijska komponenta A_d vezana je uz produkt $\cos(\omega t)\sin(\omega t)$ koji dva puta mijenja predznak unutar danog perioda T. To pak znači da vanjska sila vrši naizmjence pozitivan i negativan rad, tj. naizmjence predaje i uzima energiju iz harmonijskog oscilatora - usrednjeno *nema* predaje snage vezane uz A_d. Energija se "raspršuje" tijekom perioda bez netto-promjene, od tuda i ime ovog člana (od *lat.* dispergere, što znači raspršiti). Za disperzijsku amplitudu ponekad se koristi i termin "elastična" amplituda (s istim smislom kao npr. u nazivu za "elastične sudare" u "Općoj fizici 1").

Snaga u rezonanciji
Uvrstimo li u izraz za usrednjenju snagu 3.28 izraz za apsorpcijsku amplitudu 3.27, dobivamo:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\omega F_0 \cdot \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\omega/\tau}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} = P_0 \cdot \frac{(\omega/\tau)^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \quad , \tag{3.29}$$

gdje je P_0 snaga na $\omega=\omega_0$ ($P_0=F_0^2\tau/2m$). Izraz za apsorbiranu snagu 3.29 primjer je tzv. Lorentzove funkcije (koja se u minimalno drukčijem obliku u nuklearnoj i čestičnoj fizici naziva Breit-Wignerovom funkcijom). Iako i izraz za npr. apsorpcijsku amplitudu ima vrlo sličan oblik izrazu

3.29, pažljivijom usporedbom uočit ćemo sitne razlike - no sve razlike u obliku između tih i nekih drugih izraza nestaju[3] u blizini rezonancije ($\omega \approx \omega_0$).

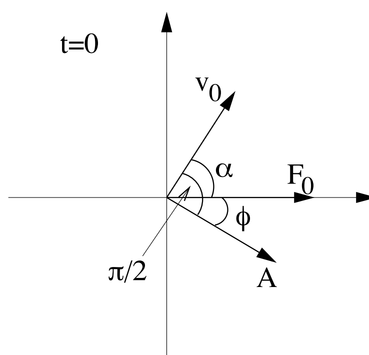
Širina rezonancije (ili tzv. puna širina na polovici visine - *engl.* Full Width at Half Maximum, FWHM), može se naći izjednačavanjem razlomka koji množi P_0 s 1/2; dobivaju se dva rješenja za frekvenciju ω čija razlika vodi na: $\Delta\omega = 1/\tau$, u skladu s rezultatom dobivenim na str. 51 (izraz 3.18).

Još treba obratiti pažnju na činjenicu da se maksimalan odziv oscilatora postiže u rezonanciji, kada je razlika faza između prisilne sile i otklona iz ravnoteže $\pi/2$. To se možda na prvi pogled ne čini logičnim, no razlog tome je vrlo jednostavan: snaga koju oscilator apsorbira ovisi o fazi između pogonske sile i *brzine* jer tada sila pogurne tijelo u pravim trenucima i na pravim mjestima. To je ujedno i najlakši način da prepoznamo rezonanciju: po usklađenosti u fazi između brzine u pogonske sile.

Za kraj ovog potpoglavlja razmotrit ćemo još brzinu $v(t)$ u formalizmu metode rotirajućih vektora i dokazati gornje tvrdnje eksplicitno. Već je ranije izvedeno (izraz 3.24):

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\omega A \sin(\omega t - \phi) = v_0 \cos(\omega t - \phi + \pi/2) \quad .$$

Odgovarajući rotirajući vektor prikazan je na slici 3.14.



Slika 3.14: Metoda rotirajućih vektora: usporedba otklona tijela $u(t)$, njegove brzine $v(t)$ i vanjske sile $F(t)$.

Fazni kut između vanjske sile i brzine označen je s α; sa slike vidimo:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \phi \quad .$$

Brzinu tijela možemo sada zapisati i ovako:

$$v(t) = v_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad .$$

Uz ovako definiran kut α, izraz za usrednjenu snagu 3.30 koju vanjska pogonska sila predaje tijelu možemo zapisati i ovako:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\omega F_0 A_a = \frac{1}{2}\omega F_0 A \sin\phi = \frac{1}{2} F_0 v_0 A \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{1}{2} F_0 v_0 A \cos\alpha \quad . \tag{3.30}$$

Usrednjena snaga ovisi, dakle, o kosinusu faznog kuta između sile i brzine. Važno je još na kraju naglasiti da rotirajuće vektore na slici 3.14 **ne** smijemo zbrajati jer se radi o različitim fizikalnim veličinama.

[3] Za detalje pogledati F.S.Crawford Jr.: "Waves", str. 111

3.1.7 Opis titranja metodom kompleksnih brojeva

Metoda kompleksnih brojeva bazirana je na sličnoj ideji kao i metoda rotirajućih vektora - prvi put smo se s njom sreli pri raspravi izmjeničnih struja na "Općoj fizici 2". Analogija je najočitija kada se poslužimo prikazom kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini. Razmotrimo kompleksan broj $e^{i\omega t}$, koji po definiciji raspisujemo ovako:

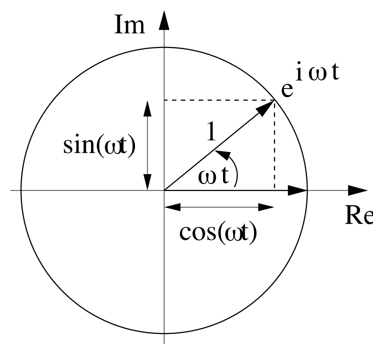
$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t) \quad .$$

Dakle, za realni i imaginarni dio kompleksnog broja $e^{i\omega t}$ vrijedi:

$$\mathrm{Re}\left[e^{i\omega t}\right] = \cos(\omega t) \quad ,$$

$$\mathrm{Im}\left[e^{i\omega t}\right] = \sin(\omega t) \quad .$$

U kompleksnoj ravnini ovaj se broj prikazuje kao na slici 3.15.



Slika 3.15: Prikaz broja $e^{i\omega t}$ u kompleksnoj ravnini.

Broj $e^{i\omega t}$ je prikazan kao jedinični vektor koji rotira kutnom brzinom ω u kompleksnoj ravnini. Izrazimo vanjsku silu i pomak iz položaja ravnoteže kompleksnim brojevima - kompleksne varijante fizikalnih veličina označavat ćemo s "$\sim$" na oznaci te veličine:

$$\tilde{F}(t) = F_0 e^{i\omega t} \quad . \tag{3.31}$$

Uz ovakav zapis, F_0 je kao i prije realna veličina, dok je $\tilde{F}$ kompleksna veličina, čiji realni dio odgovara stvarnoj (i realnoj) fizikalnoj veličini $F(t)$:

$$F(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{F}(t)\right] = F_0\cos(\omega t) \quad ;$$

konačna dobivena relacija zbilja opisuje na početku pretpostavljen oblik vanjske sile. Svaku veličinu koju smo u prošlom potpoglavlju prikazivali kao rotirajući vektor, sada možemo zapisati na način na koji smo to gore učinili sa silom. Tako npr. imamo:

$$\tilde{u}(t) = \tilde{A}e^{i\omega t} \quad .$$

Otklon iz položaja $u(t)$ ravnoteže analogno sili "rotira" kutnom brzinom ω, pa ga kao kompleksan broj i zapisujemo analogno vanjskoj sili. Činjenica da smo i amplitudi A dozvolili da bude kompleksna zapravo će se svesti na to da smo dozvolili postojanje faznog pomaka između sile $F(t)$ i otklona $u(t)$ - drugim riječima A u početnom trenutku ne mora u kompleksnoj ravnini imati isti smjer kao vanjska sila (što znamo i iz prethodnog poglavlja).

Jednadžba za harmonijski oscilator s gušenjem i prisilom je *linearna* diferencijalna jednadžba - uvrsštavanjem u nju kompleksnih varijanti veličina F i u, neće doći do "miješanja" imaginarnih

dijelova, pa će nam realan dio tih veličina u konačnici zbilja dati "fiziku rješenja". Uvrstimo stoga $\tilde{F}(t)$ i $\tilde{u}(t)$ u diferencijalnu jednadžbu za harmonijski oscilator s gušenjem i prisilom, te probajmo bez ikakvih dodatnih pretpostavki dobiti njeno rješenje:

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}\tilde{u}(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\tilde{u}(t) = \frac{\tilde{F}(t)}{m} \quad . \tag{3.32}$$

Sređivanjem dobivamo:

$$-\omega^2\tilde{A}e^{i\omega t} + i\frac{\omega}{\tau}\tilde{A}e^{i\omega t} + \omega_0^2\tilde{A}e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t} \quad ,$$

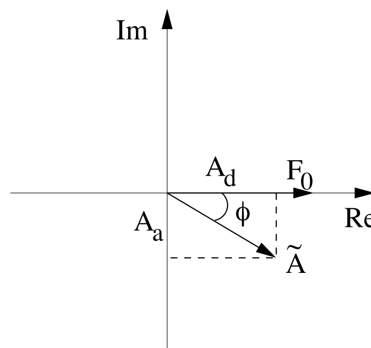
$$-\omega^2\tilde{A} + i\frac{\omega}{\tau}\tilde{A} + \omega_0^2\tilde{A} = \frac{F_0}{m} \quad ,$$

$$\tilde{A} = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)+i\,(\omega/\tau)} \quad . \tag{3.33}$$

Rastavimo dobivenu kompleksnu amplitudu $\tilde{A}$ na realni i imaginarni dio (ovaj postupak se u praksi svodi na "eliminiranje" imaginarne jedinice i iz nazivnika):

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= \frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)+i\,(\omega/\tau)}\cdot\frac{(\omega_0^2-\omega^2)-i\,(\omega/\tau)}{(\omega_0^2-\omega^2)-i\,(\omega/\tau)} = \\
&= \frac{F_0}{m}\cdot\frac{(\omega_0^2-\omega^2)-i\,(\omega/\tau)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2} = \\
&= \frac{F_0}{m}\cdot\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2} - i\cdot\frac{F_0}{m}\cdot\frac{\omega/\tau}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2} = \\
&= A_d - iA_a \quad .
\end{aligned}$$

U zadnjem su koraku korišteni rezultati za disperzijsku i apsorpcijsku amplitudu dobiveni u prošlom potpoglavlju (izrazi 3.26 i 3.27) - prikaz $\tilde{A}$ u kompleksnoj ravnini dan je na slici 3.16. Činjenica da se disperzijska amplituda A_d pojavljuje kao realan dio, a apsorpcijska kao (negativan) imaginaran dio kompleksnog zapisa $\tilde{A}$ nije slučajna - kao što smo uočili i u prethodnom potpoglavlju, disperzijska amplituda je "u fazi" s vanjskom silom, dok apsorpcijska amplituda kasni za $\pi/2$ (što zorno vidimo sa slike 3.16).



Slika 3.16: Prikaz amplitude $\tilde{A}$ u kompleksnoj ravnini.

Kao i ranije (izraz 3.16), za fazni kut između amplitude A i vanjske sile dobivamo:

$$\mathrm{tg}\ \phi = \frac{A_a}{A_d} = \frac{\omega/\tau}{\omega_0^2-\omega^2} \quad .$$

Dakle, ako je sila u početnom trenutku posve realna (što smo pretpostavili izrazom 3.31), amplituda nije, već je jednaka:

$$\tilde{A} = |\tilde{A}|e^{-i\phi} \quad .$$

Modul kompleksne amplitude dobivamo kao što se i inače dobiva modul kompleksnog broja:

$$|\tilde{A}|^2 = A_d^2 + A_a^2 = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \cdot \frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2\right]^2} = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2} \quad ;$$

$$|\tilde{A}| = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2}} \quad .$$

Pomak iz položaja ravnoteže $\tilde{u}(t)$ možemo sada pisati u ovom oblik:

$$\tilde{u}(t) = \tilde{A}e^{i\omega t} = |\tilde{A}|e^{-i\phi}e^{i\omega t} = |\tilde{A}|e^{i(\omega t - \phi)} \quad .$$

Fizikalni smisao ima samo realan dio:

$$u(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{u}(t)\right] = |\tilde{A}|\cos\left(\omega t - \phi\right) \quad ,$$

što je isto kao i ranije dobiveni rezultat. Zaključujemo da je u kompleksnom prikazu fazni pomak sadržan u kompleksnoj amplitudi $\tilde{A}$.

Nađimo brzinu tijela u kompleksnom prikazu:

$$\tilde{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tilde{A}e^{i\omega t}\right) = i\omega\tilde{A}e^{i\omega t} = \tilde{v}_0 e^{i\omega t} \quad ,$$

gdje je $\tilde{v}_0$ kompleksna amplituda brzine:

$$\tilde{v}_0 = i\omega\tilde{A} \quad .$$

Budući da vrijedi:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\pi/2} \quad ,$$

vidimo da množenjem nekog kompleksnog broja s imaginarnom jedinicom dobivamo kompleksni broj kojemu je faza povećana za $\pi/2$; to odgovara rotaciji u smjeru suprotnom od kazaljke na satu.

Za kompleksnu amplitudu brzine stoga dobivamo:

$$\tilde{v}_0 = i\omega\tilde{A} = e^{i\pi/2}\omega|\tilde{A}|e^{-i\phi} = |\tilde{v}_0|e^{i(\pi/2 - \phi)} = |\tilde{v}_0|e^{i\alpha} \quad ,$$

što je identično rezultatu dobivenom ranije (str. 62).

U sljedećem koraku možemo uvesti i kompleksnu impedanciju $\tilde{Z}$, koja povezuje kompleksnu silu i kompleksnu brzinu:

$$\tilde{F}(t) = \tilde{Z}\tilde{v}(t) \quad .$$

Uvrstimo li u ovaj izraz rezultat dobiven za kompleksnu brzinu $\tilde{v}(t)$, dobivamo:

$$F_0 e^{i\omega t} = \tilde{Z}i\omega\tilde{A}e^{i\omega t} \quad ,$$

$$F_0 = \tilde{Z}i\omega\tilde{A} \quad .$$

Uvrstimo li ovdje i dobiveni rezultat za $\tilde{A}$ (izraz 3.33), dobivamo:

$$F_0 = \tilde{Z}i\omega\frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\left(\omega/\tau\right)} \quad ,$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= \frac{m}{i\omega}\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+i\left(\omega/\tau\right)\right] = \\ &= \frac{m}{\omega}\left[\left(\omega/\tau\right)-i\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\right] = \\ &= Z_a - iZ_d \quad . \end{aligned} \tag{3.34}$$

I kompleksna impedancija ima apsorpcijsku komponentu:

$$Z_a = \frac{m}{\omega}\cdot\frac{\omega}{\tau} = \frac{m}{\tau} \quad ,$$

te disperzijsku komponentu:

$$Z_d = \frac{m}{\omega}\left(\omega_0^2-\omega^2\right) \quad .$$

Na ovaj ćemo se rezultat vratiti u četvrtom poglavlju i detaljnije ga objasniti. Za apsolutnu vrijednost impedancije, kao i prije (izraz 3.25) dobivamo:

$$|\tilde{Z}| = \frac{m}{\omega}\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\omega/\tau\right)^2} \quad .$$

Dakle, u kompleksnom obliku impedanciju možemo zapisati i ovako:

$$\tilde{Z} = |\tilde{Z}|e^{ix} \quad ,$$

gdje je x još neodređena faza; iz izraza 3.34 za nju vrijedi:

$$\text{tg } x = \frac{\text{Im}[\tilde{Z}]}{\text{Re}[\tilde{Z}]} = -\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\omega/\tau} = -\frac{1}{\text{tg } \phi} = -\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) = \text{tg}\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right) \quad .$$

Odavdje zaključujemo da vrijedi:

$$x = \phi - \frac{\pi}{2} = -\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) = -\alpha \quad ,$$

odnosno da impedanciju kao kompleksnu veličinu konačno možemo zapisati kao:

$$\tilde{Z} = |\tilde{Z}|e^{-i\alpha} \quad .$$

Iskoristimo takav zapis da prvo provjerimo je li proširenje impedancije na kompleksne veličine u skladu s originalnim načinom na koji smo uveli impedanciju (izraz 3.23). Imamo:

$$\tilde{F}(t) = \tilde{Z}\tilde{v}(t) = |\tilde{Z}|e^{-i\alpha}|\tilde{v_0}|e^{i\alpha}e^{i\omega t} = |\tilde{Z}||\tilde{v_0}|e^{i\omega t} \quad ,$$

$$F_0 = |\tilde{Z}||\tilde{v_0}| \quad ,$$

što je u skladu s prvobitnom (realnom) definicijom impedancije. Pogledajmo što još možemo "izvući" iz impedancije zapisane u kompleksnom obliku. Prije toga ćemo samu metodu proširiti da uz linearne uključimo i posebnu klasu nelinearnih veličina.

U ovom poglavlju pokazali smo da je metoda kompleksnih brojeva vrlo moćna pomoć pri proučavanju oscilirajućih pojava. Ključan uvjet njene primjenjivosti je lineranost diferencijalne jednadžbe harmonijskog oscilatora s gušenjem i prisilom - i na "Općoj fizici 2" metodu kompleksnih brojeva upotrijebili smo za opis oscilirajućih pojava (izmjeničnih struja) opisanih linearnim jednadžbama (Kirchoffovim zakonima).

Metoda se može iskoristiti i za kompliciranije račune, kao što je npr. **vremensko usrednjavanje produkta dvije oscilirajuće fizičke veličine** (s jednakim periodima titranja). No, potrebna je

mala "nadogradnja"; tvrdimo da se spomenuto usrednjavanje produkta kompleksnih veličina $\tilde{C}$ i $\tilde{D}$ dobiva pomoću izraza:

$$\langle C \cdot D \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\tilde{C} \cdot \tilde{D}^*\right] \quad , \tag{3.35}$$

gdje je s zvjezdicom $*$ označeno kompleksno konjugiranje (za neki kompleksni broj $z{=}e^{i\phi}$, njegov je kompleksno konjugiran partner jednak $z^*{=}e^{-i\phi}$).

Pokažimo da je gornja tvrdnja točna; krenimo od veličina C i D koje prikazujemo preko kompleksnih vektora kojima je i amplituda kompleksna:

$$\tilde{C} = \tilde{C}_0 e^{i\omega t} = |\tilde{C}_0| e^{i\gamma} e^{i\omega t} \qquad , \qquad \tilde{D} = \tilde{D}_0 e^{i\omega t} = |\tilde{D}_0| e^{i\delta} e^{i\omega t} \quad .$$

Izračunajmo prvo desnu stranu izraza 3.35:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left[\tilde{C} \cdot \tilde{D}^*\right] &= |\tilde{C}_0||\tilde{D}_0|\mathrm{Re}\left[e^{i\gamma} e^{i\omega t} e^{-i\delta} e^{-i\omega t}\right] = \\ &= |\tilde{C}_0||\tilde{D}_0|\mathrm{Re}\left[e^{i(\gamma-\delta)}\right] = \\ &= |\tilde{C}_0||\tilde{D}_0| \cos(\gamma - \delta) \quad , \end{aligned}$$

Izračunajmo sada usrednjenje na lijevoj strani izraza 3.35; tu se pojavljuju nekompleksne veličine za koje vrijedi (suglasno s gornjim kompleksnim relacijama):

$$C = |\tilde{C}_0| \cos(\omega t + \gamma) \quad ,$$

$$D = |\tilde{D}_0| \cos(\omega t + \delta) \quad .$$

Za njihov vremenski usrednjen produkt imamo tada:

$$\begin{aligned} \langle C \cdot D \rangle &= \langle |\tilde{C}_0| \cos(\omega t + \gamma) |\tilde{D}_0| \cos(\omega t + \delta) \rangle = \\ &= |\tilde{C}_0||\tilde{D}_0| \langle [\cos(\omega t)\cos\gamma - \sin(\omega t)\sin\gamma]\,[\cos(\omega t)\cos\delta - \sin(\omega t)\sin\delta] \rangle = \\ &= |\tilde{C}_0||\tilde{D}_0| \Big[\langle \cos^2(\omega t)\cos\gamma\cos\delta \rangle - \langle \cos(\omega t)\sin(\omega t)\sin\gamma\cos\delta \rangle - \\ &\quad - \langle \cos(\omega t)\sin(\omega t)\cos\gamma\sin\delta \rangle + \langle \sin^2(\omega t)\sin\gamma\sin\delta \rangle \Big] \\ &= 1/2 |\tilde{C}_0||\tilde{D}_0| (\cos\gamma\cos\delta + \sin\gamma\sin\delta) \\ &= 1/2 |\tilde{C}_0||\tilde{D}_0| \cos(\gamma - \delta) \quad . \end{aligned}$$

Zaključujemo: izrazi na lijevoj i desnoj strani jednadžbe 3.35 su jednaki, čime smo dokazali ispravnost te jednadžbe u općenitom slučaju.

Primijenimo sada izraz 3.35 na konkretan primjer, npr. na račun usrednjene snage:

$$\langle P \rangle = \langle F \cdot v \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\tilde{F}(t) \cdot \tilde{v}^*(t)\right] \quad ,$$

Iskoristimo li:

$$\tilde{F}(t) = \tilde{Z}\tilde{v}(t) = (Z_a - iZ_d)\,\tilde{v}(t) \quad ,$$

dobivamo:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(Z_a - iZ_d)\,\tilde{v}(t)\tilde{v}^*(t)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(Z_a - iZ_d)\,|\tilde{v}_0|^2\right] = \\ &= \frac{1}{2}|\tilde{v}_0|^2 Z_a \quad , \end{aligned}$$

Iskoristimo li još:

$$|\tilde{v_0}| = \omega|\tilde{A}| \quad ,$$

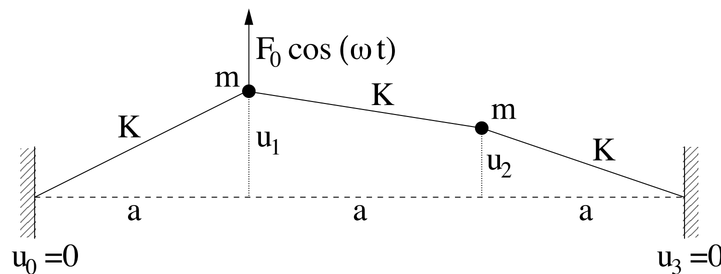
dobivamo konačno:

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}\omega^2|\tilde{A}|^2 Z_a \quad .$$

Usrednjena snaga ovisi samo o apsorpcijskoj impedanciji. Ovaj ćemo rezultat dalje diskutirati u četvrtom poglavlju.

3.2 Prisilno titranje sistema s dvije čestice

Pogledajmo sada sistem s dvije čestice pod utjecajem pogonske sile i uz gušenje. U principu gušenje ne mora biti isto za obje čestice, ali u našem ćemo se ramatranju ograničiti samo na taj slučaj. Neka vanjska periodička sila $F(t)=F_0\cos(\omega t)$ djeluje samo na prvu česticu, kao što je shematski prikazano na slici 3.17. Ovisnost o mjestu djelovanja sile razmotrit ćemo kasnije, u sljedećem potpoglavlju.



Slika 3.17: Sustav s dvije jednake čestice vezane oprugama pod utjecajem vanjske sile koja djeluje na jednu od čestica.

Jednadžbe gibanja za dvije čestice u ovom sustavu dane su s:

$$m\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} = -K(u_1 - u_0) + K(u_2 - u_1) - bv_1 + F_0\cos(\omega t) \quad , \tag{3.36}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} = -K(u_2 - u_1) + K(u_3 - u_2) - bv_2 \quad . \tag{3.37}$$

Gibanja tijela su povezana - iako vanjska sila djeluje samo na prvu česticu, njen utjecaj posredno osjeća i druga (to ćemo kasnije i pokazati eksplicitno). Postavlja se pitanje možemo li na ovaj način pobuditi modove titranja slobodnog sustava (sustava bez pogonske sile i gušenja).

Ispitajmo mogućnost da sustav titra u prvom modu slobodnog sustava (vidi str. 15), za koji vrijedi u_1=u_2. Gornja jednadžba za prvo tijelo tada postaje formom identična jednadžbi za tjerani harmonijski oscilator s jednim tijelom (izraz 3.3):

$$\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{K}{m}u_1 = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \left(\omega^{(1)}\right)^2 u_1 = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad .$$

Razlika u odnosu na sistem s jednim tijelom je u tome da se sada kao vlastita frekvencija oscilatora pojavljuje $\omega^{(1)}$, tj. frekvencija prvog moda. Druga čestica titra kao i prva jer vrijedi $u_2{=}u_1$.

Gornja nehomogena diferencijalna jednadžba ima po formi isto rješenje kao i u sistemu sa samo jednim tijelom; dakle opće rješenje sastoji se od tranzijentnog dijela (koje eksponencijalno trne u vremenu) i stacionarnog rješenja (trigonometrijskog oblika). Nas zanima samo stacionarno titranje; dakle, gledamo limes $t{\gg}\tau$, pa je rješenje tada (uz oznaku $u_1{=}u_2{=}u$):

$$u(t) = A^{(1)} \cos\left(\omega t - \phi^{(1)}\right) \quad ,$$

gdje je su amplitude i faza čestica u prvom modu:

$$A^{(1)} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\left(\omega^{(1)}\right)^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2}} \quad ,$$

$$\text{tg}\ \phi^{(1)} = \frac{\omega/\tau}{\left(\omega^{(1)}\right)^2 - \omega^2} \quad .$$

Dakle, u stacionarnom stanju vanjska sila tjera sustav na titranje u prvom modu s time da rezultirajuća amplituda i fazni pomak ovise o razlici frekvencije ω vanjske sile i rezonantne frekvencije prvog moda $\omega^{(1)}$.

Budući da u prvom modu titranja vrijedi $u_2{=}u_1$, dobivanjem rješenja za prvu česticu, ujedno smo našli i rješenje za drugu. No, ono je dobiveno uz *pretpostavku* da se titranje dešava u prvom modu, što se ne može smatrati korektnim dokazom. "Pravi dokaz" bilo bi eksplicitno rješavanje sustava jednadžbi 3.36 i 3.37; relativno jednostavno se pokazuje da su normalne koordinate tog sustava i modovi titranja isti kao i za sustav bez prisile i gušenja[4]. Kako to objasniti na temelju gornjeg razmatranja? Zašto diferencijalna jednadžba i za drugu česticu daje kao rješenje titranje pogonskom frekvencijom, iako se ona nigdje ne pojavljuje eksplicitno u jednadžbi 3.37? Odgovor je jednostavan: pogonska frekvencija u jednadžbu 3.37 ulazi preko otklona prve čestice (u_1) - član Ku_1 oscilira pogonskom frekvencijom ω i ima ulogu vanjske periodične sile za osciliranje druge čestice. **Zaključujemo**: sistem jednadžbi 3.36 i 3.37 ima rješenje uz pretpostavku da čestice titraju u prvom modu titranja slobodnog sustava, ali frekvencijom ω nametnutom vanjskom silom.

Što je s drugim modom? Pobuđuje li vanjska sila i titranje u drugom modu? U drugom modu slobodnog titranja vrijedilo je $u_2{=}{-}u_1$, pa diferencijalna jednadžba za prvu česticu postaje:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{3K}{m}u_1 = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \left(\omega^{(2)}\right)^2 u_1 = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad .$$

U stacionarnom stanju analogno imamo (uz oznake $u_1{=}u$, $u_2{=}{-}u$):

$$u(t) = A^{(2)} \cos\left(\omega t - \phi^{(2)}\right) \quad ,$$

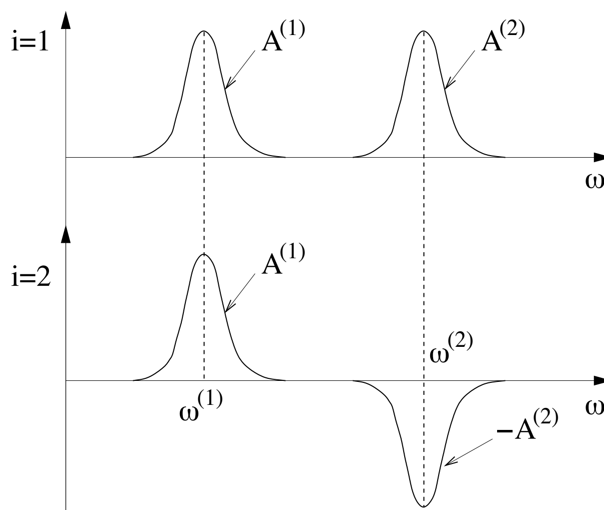
$$A^{(2)} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\left(\omega^{(2)}\right)^2 - \omega^2\right)^2 + (\omega/\tau)^2}} \quad ,$$

$$\text{tg}\ \phi^{(2)} = \frac{\omega/\tau}{\left(\omega^{(2)}\right)^2 - \omega^2} \quad .$$

[4]Za sam izvod ovog dokaza vidjeti F.S.Crawford Jr.: "Waves", str. 117

Dakle, vanjska sila tjera sustav i na titranje u drugom modu. Rezultirajuća amplituda i fazni pomak ovise o razlici frekvencije ω vanjske sile i rezonantne frekvencije drugog moda $\omega^{(2)}$.

Zaključujemo da u stacionarnom stanju vanjska sila tjera oba moda, odnosno ukupno titranje je superpozicija dva od prije poznata moda. Titranje svakog moda je **prisilno**, tj. odvija se na frekvenciji vanjske sile (a ne na vlastitim frekvencijama modova). Mijenjamo li frekvencije pogonske sile ω, možemo postići uzastopne rezonancije približavanjem frekvencijama titranja svakog od modova, kao što je shematski pokazano na slici 3.18.



Slika 3.18: Amplituda titranja sustava s dva tijela kao funkcija frekvencije pogonske sile.

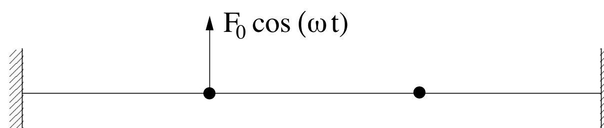
Na proizvoljnoj frekvenciji pogonske sile ω, prisilno titraju oba moda na toj frekvenciji, ali s različitim amplitudama. Ako je ω u blizini frekvencije $\omega^{(1)}$, onda dominira prvi mod, tj. amplituda $A^{(1)}$ je velika, a $A^{(2)}$ malena (ponekad i zanemariva). Obrnuto, ako smo frekvencijom ω u blizini frekvencije drugog moda $\omega^{(2)}$, amplituda $A^{(2)}$ je velika, a amplituda $A^{(1)}$ najčešće zanemarivo malena. Dakako, budući da je širina rezonancije $\Delta\omega$ za svaki mod ovisna o jakosti gušenja, moguće je da rezonancije budu toliko široke da se i preklapaju - slika 3.18 odgovara situaciji kada je $\Delta\omega$ puno manja od razlike dvaju rezonantnih frekvencija, $\omega^{(2)}-\omega^{(1)}$. Kvantitativno razmatranje rezonancija koje se preklapaju prilično je komplicirano i zahtjeva puno ozbiljniji matematički pristup.

Demonstracijski pokus 3.8: sustav s dva tijela

Važno uočiti: uzastopne rezonancije dvaju modova.

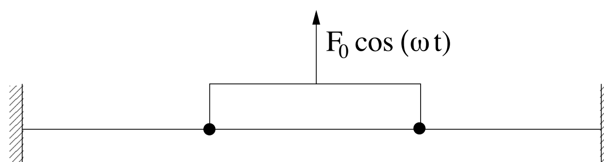
3.2.1 Sprega vanjske sile i sustava

U prethodnom potpoglavlju pretpostavili smo da vanjska sila djeluje samo na jedno (prvo) od dva tijela, kao što je shematski prikazano na slici 3.19. Pokazali smo da se uz takvu pretpostavku pobuđuju *oba moda* titranja jer se, ovisno o frekvenciji vanjske sile, druga čestica može gibati tako da se realizira jedan ili drugi mod.



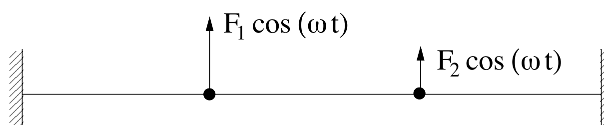
Slika 3.19: Sustav s dva tijela - vanjska sila djeluje samo na jedno od njih.

Pogledajmo kako bi izgledalo titranje kada bi vanjskom silom djelovali istovremeno (i u fazi) na obje čestice, kao što je shematski prikazano na slici 3.20. Očito je da je nemoguće postići stacionarno stanje u kojem bi druga čestica titrala u protufazi prvoj, tj. za koje bi vrijedilo $u_2 = -u_1$ (jer se sila protivi takvoj kombinaciji otklona). Dakle, ovakvim djelovanjem prisilne sile *ne može* se pobuditi *drugi mod* titranja sistema, već isključivo prvi. Sila ne djeluje direktno na drugu česticu, no njeno gibanje se tijekom tranzijentne faze prilagođava gibanju prve čestice i u stacionarnom se stanju realizira samo jedan od modova titranja (prvi), kao što je objašenjeno u prethodnom potpoglavlju.



Slika 3.20: Sustav s dva tijela - vanjska sila djeluje na oba tijela istom vanjskom silom (u fazi).

Pogledajmo treću situaciju, shematski prikazanu na slici 3.21. Na oba tijela djeluje vanjska sila, te sile su u fazi, ali različitih amplituda. Kao rezultat dobit ćemo pobuđivanje oba moda titranja spomenuta u prethodnom potpoglavlju, no s različitim amplitudama jer se prvi mod efektivno pobuđuje većom silom (F_1+F_2), a drugi mod manjom (F_1-F_2).



Slika 3.21: Sustav s dva tijela - vanjska sila djeluje na oba tijela, ali su amplitude sila različite.

Dakako, moguć je i čitav niz drugačijih djelovanja sila na dva tijela (npr. sile na dva tijela koje nisu u fazi), no već na temelju navedena tri primjera možemo **zaključiti** da pobuđivanje modova titranja jako ovisi o sprezi vanjske sile (ili sila) i sustava. Želimo li biti sigurni da vanjskom silom možemo pobuditi sve modove titranja slobodnog sustava, najjednostavnije je vanjsku silu primjeniti samo na jedno tijelo u sustavu (npr. na rubu sustava).

3.3 Prisilno titranje sistema s više čestica

Pogledajmo sada sustav od N tijela - kada je takav sustav bio “slobodan” (bez gušenja i prisile), bila je moguća realizacija N nezavisnih modova (vidi poglavlje 1.3.3). Djelujemo li na takav sustav vanjskom pogonskom silom (uz gušenje), sutav će proći kroz kompliciranu tranzijentnu fazu, te završiti u stacionarnom stanju. Ovisno o detaljima vanjske sile (djeluje li samo na jedno tijelo ili više njih, jesu li njene razne komponente u fazi itd), može se desiti da će se pobuditi

samo neki od modova titranja slobodnog sustava, no općenito govoreći u stacionarnom je stanju moguće pobuđivanje *svih modova istovremeno* nametnutom frekvencijom ω. Najočitiji način kako primijeniti vanjsku silu, a da ne eliminiramo neke modove (kao npr. na slici 3.20), je djelovanje vanjskom silom *samo na jedno tijelo*. Amplituda pojedinog moda ovisi o spomenutim detaljima vanjske sile, ali i o tome koliko je pogonska frekvencija ω daleko od rezonantne frekvencije danog moda. Za $\omega \approx \omega^{(n)}$, najvećom amplitudom titrat će n-ti mod (osim ako isti nije "zabranjen" zbog načina na koji djeluje vanjska sila), dok će doprinos ostalih modova biti jedva primjetan.

Demonstracijski pokus 3.9: sustav s tri tijela

Važno uočiti: uzastopne rezonancije modova.

Treba još uočiti da u limesu vrlo slabog gušenja (gušenje različito od nule mora postojati da bi se uspostavilo stacionarno titranje), daleko od rezonancija relativne faze dijelova sustava *moraju* biti ili 0 ili π (u protivnom bi postojala apsorpcija energije) - podsjetite se i slike 3.5, te diskusije na str. 51.

3.3.1 Princip rada mehaničkog filtera

Razmotrimo jednostavnosti radi sustav s 3 tijela - znamo da za vlastite frekvencije titranja tog sustava vrijedi (vidi str. 21):

$$\omega^{(1)} < \omega^{(2)} < \omega^{(3)} \quad .$$

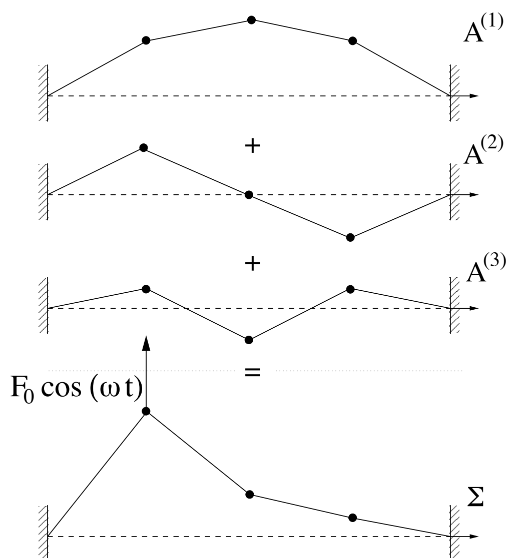
Pogledajmo ponašanje takvog sustava pod utjecajem vanjske sile; pretpostavimo da je djelovanje vanjske sile takvo da dozvoljava pobuđivanje sva tri moda slobodnog sustava (ali na frekvenciji prisilne sile, dakako).

Pogledajmo prvo limes $\omega \ll \omega^{(1)}$; tj. slučaj kada je frekvencija pogonske sile (i stoga frekvencija titranja) puno manja od frekvencije najnižeg (prvog) moda. U tom je limesu frekvencija oscilacija ω najbliža frekvenciji prvog moda (i odgovarajućoj rezonanciji), a najrazličitija od frekvencije trećeg moda (i njene rezonancije). Primijenimo li vanjsku silu samo na jedno tijelo (npr. prvo), sigurno nećemo "zabraniti" nijedan od modova titranja, pa će nam amplituda pojedinog moda ponajviše biti definirana time koliko je frekvencija tog moda daleka od prisilne frekvencije. U tog pojednostavljenoj slici stoga očekujemo da će odnos amplituda modova u našem tročestičnom sistemu biti:

$$A^{(1)} > A^{(2)} > A^{(3)} \quad .$$

Kao što je objašnjeno i prije, u slučaju vrlo slabog gušenja daleko od rezonancija relativne faze dijelova sustava moraju biti ili 0 ili π (u limesu $\omega \ll \omega^{(1)}$ u pitanju je, dakako, nula). Ukupno titranje daje zbroj triju modova, kao što je shematski prikazano na slici 3.22. Na slici je i ilustrirana činjenica da vanjska sila djeluje samo na prvo tijelo.

Vidimo da amplitude čestica opadaju krenemo li od čestice za koju su doprinosi svih modova u fazi (tj. od prve čestice na koju djeluje vanjska sila). Budući da daleko od rezonancije prevladavaju disperzijske amplitude, amplituda titranja tijela opada s udaljenošću od mjesta gdje djeluje sila koja uzrokuje prisilno titranje. Zbog slabljenja titranja vidimo da sustav djeluje kao filter - titranje uzrokovano vanjskom silom guši se duž sustava (od lokacije djelovanja vanjske sile), ako je frekvencija tog titranja manja od granične. Ovisno o detaljima samog sustava, to gušenje može biti slabije ili jače, pa i potpuno - tada je (na frekvencijama manjim od granične) nemoguće "prenijeti" titranje na tijela daleka od točke gdje djeluje sustav. Isti bi zaključak vrijedio neovisno o broju



Slika 3.22: Pobuđenost tri moda sustava s tri čestice na frekvencijama puno manjim od $\omega^{(1)}$, te ukupna amplitude titranja čestica.

tijela u sistemu.

Sada pogledajmo limes $\omega \gg \omega^{(3)}$; tj. slučaj kada je frekvencija pogonske sile (i prisilnog titranja) puno veća od frekvencije najvišeg (trećeg) moda titranja. Uz argumentaciju analognu prethodnom slučaju, zaključujemo da amplitude modova rastu od prvog do trećeg po iznosu - no za velike frekvencije znamo da su one u protufazi s vanjskom silom (pa stoga efektivno negativne). Možemo, dakle, pisati:

$$|A^{(1)}| < |A^{(2)}| < |A^{(3)}| \quad .$$

Ukupno titranje definira zbroj triju modova, kao što je shematski prikazano na slici 3.23.

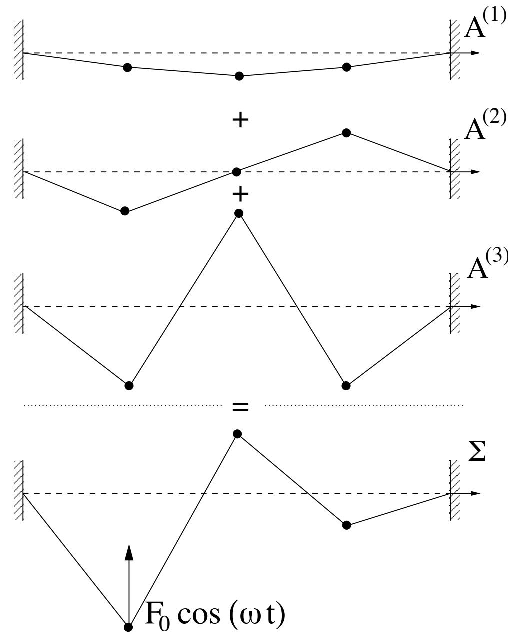
Suma doprinosa tri moda (najdonji dio slike 3.23) pokazuje jasnu cik-cak konfiguraciju s amplitudama koje opadaju po iznosu krenemo li od čestice za koju su doprinosi svih modova u fazi. Relativne faze dijelova sustava su u ovom slučaju jednake π.

Demonstracijski pokus 3.10: sustav s tri tijela kao mehanički filter

Važno uočiti: amplitude titranja tijela za $\omega \ll \omega^{(1)}$ i $\omega \gg \omega^{(3)}$.

Iako sami oblici titranja za dvije ekstremne frekvencije nisu isti, zajedničko im je to da su rezultantne *amplitude puno manje* od amplituda koje bi tijela imala u blizini frekvencija pojedinih modova. Dakle, ako se na promatrani sistem putem vanjske sile unose prisilne oscilacije, one će duž sustava biti prigušene u limesima $\omega \ll \omega^{(1)}$ i $\omega \gg \omega^{(3)}$. Oko rezonantnih frekvencija dešavat će se jak odziv sustava u vidu oscilacija s velikim amplitudama. Što je broj čestica u sistemu veći, broj modova i rezonantnih frekvencija je veći i područje između $\omega^{(1)}$ i $\omega^{(N)}$ je ravnomjernije popunjeno rezonancijama.

Općenito, sustav od N čestica vezanih oprugama djeluje kao **mehanički filter** za sve frekvencije $\omega \ll \omega^{(1)}$ (ispod najdonje rezonancije, odnosno tzv. donje granične frekvencije) i za sve frekvencije $\omega \gg \omega^{(3)}$ (iznad najgornje rezonancije, odnosno tzv. gornje granične frekvencije). Mehanički filteri,



Slika 3.23: Pobuđenost tri moda sustava s tri čestice na frekvencijama puno većim od $\omega^{(3)}$, te ukupna amplitude titranja čestica.

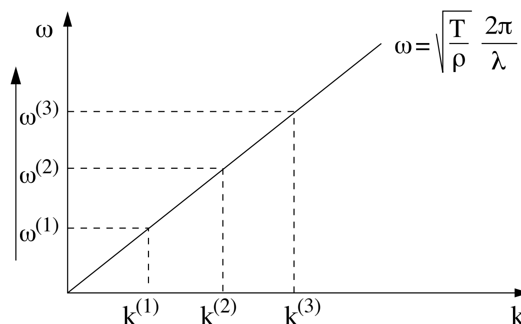
u nešto složenijoj izvedbi, služe za izolaciju od neželjenih vibracija iz nekog izvora. Primjeri primjene istih su postolja pogonskih strojeva, kontakti s drugim uređajima, postalja za vrlo osjetljive uređaje itd. Kombiniranjem više filtera moguće je "eliminirati" i bitno šire i složenije područje frekvencija of gore opisanog. U sedmom poglavlju detaljnije ćemo se upoznati i s električnim analozima ovakvih filtera.

3.4 Prisilno titranje elastične niti (kontinuuma)

Prisjetimo se disperzijske relacije za titranje elastične niti (izraz 1.24):

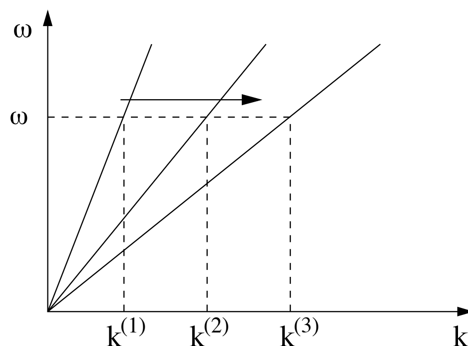
$$\omega^{(n)} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \cdot \frac{2\pi}{\lambda^{(n)}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} k^{(n)} \quad .$$

Frekvencija i (kutni) valni broj vezani su linearno, kao što je prikazano na slici 3.24.



Slika 3.24: Prelaženje preko rezonancija u kontinuumu promjenom frekvencije pogonske sile.

U stacionarnom stanju frekvencija titranja definirana je vanjskom silom - mijenjanjem frekvencije pogonske sile prelazimo preko rezonancija modova i dobivamo odgovarajuće poraste i padove amplituda titranja. Alternativno, možemo držati frekvenciju pogonske sile konstantnom, a rastezati (ili stezati) nit tako da se $\sqrt{T/\rho}$ povećava (smanjuje). Pri fiksnim frekvencijama pogonske sile dobivali bi rezonance u času kada bi preslikavanje preko disperzijskog pravca (kao na slici 3.25) vodilo na rezonantne kutne valne brojeve.



Slika 3.25: Prelaženje preko rezonancija u kontinuumu rastezanjem niti.

Demonstracijski pokus 3.11: uzastopne rezonancije modova titranja elastične niti

Važno uočiti: promjene amplitude titranja tijela pri promjeni frekvencije vanjske sile, te pri rastezanju niti.

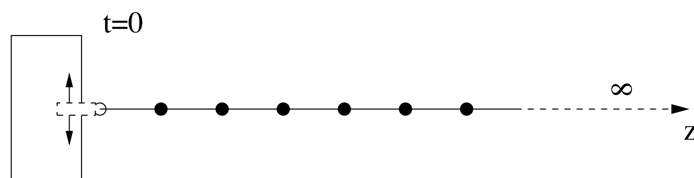
4

Valovi u jednoj dimenziji

4.1 Nastanak valnog gibanja

U prethodnim smo poglavljima razmatrali titranje u složenim sustavima koji su bili prostorno ograničeni na oba kraja ("zatvoreni"). Rezultantne slobodne oscilacije opisali smo kao superpoziciju raznih modova titranja, definiranu početnim uvjetima. U ovom poglavlju za početak ćemo razmatrati sustave koji su bar na jednom kraju "**otvoreni**", dakle prostorno neograničeni.

Pogledajmo npr. sustav jednakih čestica vezanih oprugama koji se u jednom smjeru proteže u beskonačnost. Na (jedini) kraj takvog sustava spojena je naprava ("izvor" valova) kojom se lijevi rub prve opruge (dakle, rub koji je u prethodnim poglavljima bio fiksiran) periodički pomiče transverzalno na smjer prostiranja sistema. Nastanak i širenje valova razmatrat ćemo za slučaj transverzalnih oscilacija - u prethodnim smo poglavljima vidjeli da u složenom sustavu s oprugama nema nekih bitnih konceptualnih razlika između transverzalnih i longitudinalnih oscilacija, pa će svi zaključci do kojih dođemo ovdje za transverzalne valove, vrijediti i za longitudinalne.



Slika 4.1: Nastanak vala u sustavu vezanih opruga: početni trenutak (t=0).

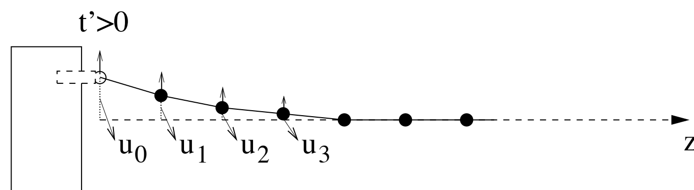
U početnom trenutku gore opisan sustav prikazan je na slici 4.1. Čestice su predočene crnim krugovima, opruge ravnim linijama koje ih spajaju, a naprava za izazivanje titranja na kraju sistema s pravokutnikom sasvim lijevo. Na mjestu gdje je stroj spojen na sustav opruga ne postoji tijelo, već je stroj spojen direktno na kraj opruge (to je lokacija koju smo standardno označavali s u_0). Os z smo definirali tako da raste od kraja sustava prema desno, kao na slici. Za sada razmatramo valne pojave samo u jednoj dimenziji.

Neka vanjska periodična sila pomiče kraj sistema (lijevi rub prve opruge) tako da on izvodi harmoničko titranje:

$$u_0(t) = A\sin(\omega t) \quad . \tag{4.1}$$

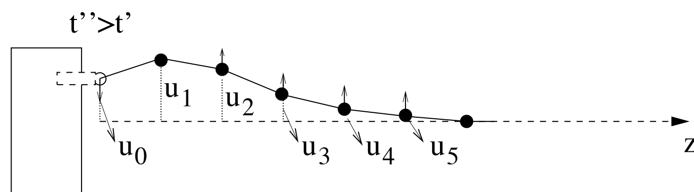
Period titranja kraja sustava jednak je, dakle, $T = 2\pi/\omega$. Uočite da smo izabrali funkciju $\sin(\omega t)$ (a ne npr. kosinus ili njihovu kombinaciju) da bi bili u skladu s početnom situacijom danom na slici 4.1. Opruge će "prenositi" nametnuto gibanje kraja s čestice na česticu (i tako redom), pa će nakon nekog kratkog vremena t' ($t' < T/4$), sistem izgledati kao na slici 4.2. Strelicima je označen

trenutačni smjer kretanja kraja sustava i pojedinih čestica (za sada su sve brzine istog smjera), a otkloni iz položaja ravnoteže označeni su standardno s u_i. Utjecaj nametnutih oscilacija proširio se do neke čestice (u našem primjeru na slici 4.2 do treće), dok je ostatak čestica u sustavu i dalje u svom ravnotežnom položaju.



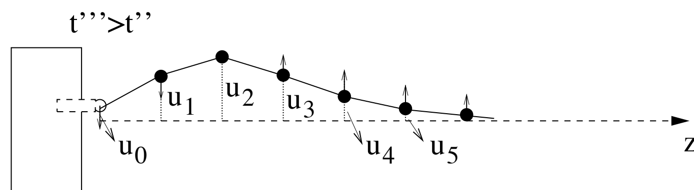
Slika 4.2: Nastanak vala u sustavu vezanih opruga: trenutak t' ($t'<T/4$).

U nekom kasnijem trenutku t'' ($T/4<t''<T/2$), otklon u_0 je prošao kroz svoju maksimalnu vrijednost A i počinje se smanjivati, kao što je prikazano na slici 4.3. U nastavku u_0 teži k nuli (ravnotežnom položaju), a prva čestica sustava dosiže maksimalan otklon $u_1=A$ (isti onaj otklon koji je rub sustava imao u nešto ranijem trenutku). Druga i daljnje čestice još se više udaljavaju od položaja ravnoteže.



Slika 4.3: Nastanak vala u sustavu vezanih opruga: trenutak t'' ($T/4<t''<T/2$).

Nakon toga se i prva čestica počinje vraćati prema položaju ravnoteže, dok druga čestica postiže svoj maksimalan otklon $u_2=A$. Treća se čestica približava položaju maksimalnog otklona, a daljnje čestice ju slijede. Uočite da za sada nije dan čvrst (formalan) dokaz da će maksimalni otkloni svih čestica biti jednaki - tako što ćemo moći sa sigurnošću zaključiti tek kada i formalno riješimo valnu jednadžbu (npr. izraz 1.26) i matematički dobijemo za rješenje funkciju koju ovdje napipavamo "na prste"...



Slika 4.4: Nastanak vala u sustavu vezanih opruga: trenutak t'''.

Proces se nastavlja - u_0 postaje negativan (lijevi rub prve opruge prelazi na drugu stranu ravnotežnog položaja), prva čestica slijedi taj rub s kašnjenjem, druga čestica slijedi prvu itd. Prva čestica, dakle, u nekom trenutku $t'+\Delta t$ "ponavlja" isto što je napravio rub sustava (na kojem se nalazi stroj za proizvodnju valova) u trenutku t' - stoga mora vrijediti:

$$u_0(t') = u_1(t' + \Delta t) \quad ,$$

Da bi to bilo ispunjeno, uz zadano ponašanje ruba sustava (odabrano izrazom 4.1), za prvu česticu mora vrijediti:

$$u_1(t) = A \sin [\omega(t - \Delta t)] = A \sin (\omega t - \Delta\phi) \quad ,$$

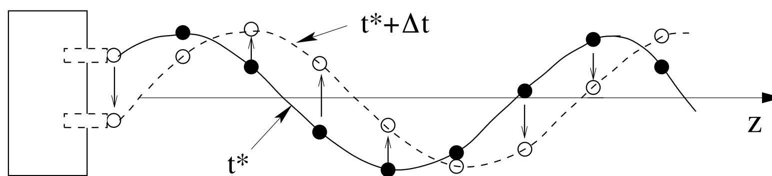
gdje smo pri drugom koraku uveli i zamjenu $\Delta\phi=\omega\Delta t$, tj. vremensko smo kašnjenje zamijenili s ekvivalentnim faznim pomakom.

Titranje se dalje prenosi od čestice do čestice na isti način - vremensko kašnjenje (odnosno fazni pomak) među susjedima je uvijek isti jer su čestice pravilno poredane po z-osi. Dobivamo stoga **valno titranje**, odnosno pojavu pri kojoj sve čestice titraju jednakom amplitudom i jednakom frekvencijom, ali s vremenskim kašnjenjem između uzastopnih čestica. Za drugu i daljnje čestice stoga imamo:

$$u_2(t) = A\sin\left[\omega(t-2\Delta t)\right] = A\sin\left(\omega t - 2\Delta\phi\right) \quad ,$$
$$u_3(t) = A\sin\left[\omega(t-3\Delta t)\right] = A\sin\left(\omega t - 3\Delta\phi\right) \quad ,$$
$$\dots$$
$$u_i(t) = A\sin\left[\omega(t-i\Delta t)\right] = A\sin\left(\omega t - i\Delta\phi\right) \quad , \tag{4.2}$$
$$\dots$$

Titranje svake čestice kasni za Δt u odnosu na prethodnu - ukupno kašnjenje i-te čestice prema rubu sustavu iznosi stoga $i\Delta t$[1].

Nakon dovoljno dugo vremena od pokretanja pogonske sile titranja (odnosno naprave koji miče lijevi rub prve opruge na lokaciji u_0), titranje se proširi do čestica koje su jako daleko duž osi z. Tamo se sada odigrava gore opisan prelazak čestica iz mirovanja (u položaju ravnoteže) u stanje titranja, no to nas više ne zanima. Ono što nas sad zanima je dio sustava u kojem je uspostavljeno potpuno valno gibanje, te njegovo ponašanje između dva bliska trenutka, npr. trenutaka t^* i $t^*+\Delta t^*$. Radi jednostavnosti, uzmimo primjer u kojem je Δt^* upravo jednako onom kašnjenju Δt koje se pojavljuje u gornjim jednadžbama ($\Delta t^*=\Delta t$).



Slika 4.5: Nastanak vala u sustavu vezanih opruga: proizvoljan trenutak t^* (puna linija) i trenutak Δt^* kasnije (crtkano).

Strelice označavaju pomake pojedinih čestica u vremenskom intervalu Δt. Interval Δt odabran je tako da je novi otklon pojedine čestice iz položaja ravnoteže jednak prijašnjem oktlonu prethodne čestice u nizu, tj.:

$$u_i\left(t^* + \Delta t\right) = u_{i-1}\left(t^*\right) \quad .$$

Ovakav se odnosi može dobiti i posve matematički:

$$u_i\left(t^* + \Delta t\right) = A\sin\left[\omega\left(t^* + \Delta t - i\Delta t\right)\right] = A\sin\left[\omega\left(t^* - (i-1)\Delta t\right)\right] = u_{i-1}\left(t^*\right) \quad .$$

Zaključujemo: Pogonska sila koja pokreće rub sustava predstavlja *izvor* vala. Val se širi u *valnom sredstvu* koje predstavlja niz čestica vezanih oprugama. Čestice ne putuju duž osi z, već svaka od njih titra oko svojeg ravnotežnog položaja. Ono što opažamo kao širenje vala duž osi z je zapravo pomicanje oblika vala duž osi z, koje nastaje zbog vremenskog kašnjenja u titranjima uzastopnih čestica u nizu.

[1]Oznaku "i" u ovom poglavlju upotrebljavamo, dakako, kao indeks (redni broj) čestice u sustavu, a ne kao imaginarnu jedinicu kao u prošlom poglavlju.

Zapišimo otklon i-te čestice vala preko njene z-koordinate. Budući da vrijedi z_i=$i \cdot a$, kašnjenje $i\Delta\phi$ prema izvoru $u_0(t)$ možemo zapisati ovako:

$$i\Delta\phi = \frac{z_i}{a}\Delta\phi = kz_i \quad ,$$

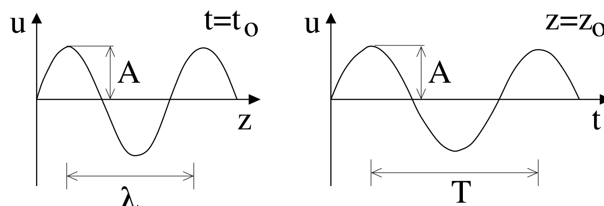
gdje smo uveli zamjenu k=$\Delta\phi/a$ za koju ćemo kasnije pokazati da je riječ o kutnom valnom broju. Izraz 4.2 sada možemo napisati ovako:

$$u(z,t) = A \sin(\omega t - kz) \quad . \tag{4.3}$$

Funkciju $u(z,t)$ nazivamo **valnom funkcijom**; kasnije ćemo pokazati da je ona jedno od rješenja općenite valne jednadžbe (poput npr. jednadžbe 1.26) u jednodimenzionalnom prostoru. Tada ćemo i konačno zaključiti da sve čestice titraju istom amplitudom i frekvencijom, ali s različitim fazama (kašnjenjem). Valna funkcija $u(z,t)$ opisuje "**putujući val**" (ponekad se koristi i izraz "progresivni val") koji se širi u pozitivnom smjeru osi z; val koji bi se širio duž negativnog smjera imao bi fazno kašnjenje $+kz$, odnosno jednadžbu:

$$u(z,t) = A \sin(\omega t + kz) \quad . \tag{4.4}$$

Dobivena valna funkcija je funkcija dvije varijable, položaja z i vremena t. Gledamo li val u nekom odabranom trenutku t=t_o, možemo zaključiti da otkloni iz ravnoteže u_i pojedinih čestica pokazuju sinusnu (općenitije: trigonometrijsku) ovisnost o koordinatama z_i tih čestica (slika 4.6 lijevo). Obrnuto, promatramo li što se dešava s nekom česticom na odabranom položaju z=z_o (slika 4.6 desno), izraz 4.3 pokazuje nam da ona harmonički titra u vremenu oko ravnotežnog položaja (period titranja T=$2\pi/\omega$).



Slika 4.6: Prostorni oblik vala u nekom odabranom trenutku t_o i vremensko ponašanje otklona u u nekoj odabranoj točki z_o. Ovisno o odabiru trenutka t_o i točke z_o sinusoida ne mora, dakako, kretati iz ishodišta.

4.1.1 Valna funkcija kao rješenje valne jednadžbe

U kasnijim poglavljima pokazat ćemo da je za diskretne sustave (sustave koji nisu kontinuirani) valna funkcija 4.3 zbilja rješenje jednadžbe gibanja sustava, s naglaskom na činjenicu da je amplituda A u tom rješenju jednaka za sve čestice (neovisna o z). U ovom je trenutku korisno tu istu stvar provjeriti za sustav kod kojeg smo jednadžbu gibanja već bitno pojednostavili i "pripremili" za provjeru; riječ je o *kontinuumu* za koji nam se jednadžba gibanja svela na relativno jednostavnu valnu jednadžbu.

U poglavlju 1.4.1 (str. 27) izveli smo **valnu jednadžbu za kontinuum**, tj. elastičnu nit (izraz 1.26); činjenicu da je otklon u funkcija dvije varijable ovdje naglašavamo parcijalnim derivacijama:

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} \quad , \tag{4.5}$$

a uveli smo i novu veličinu $c^2 = T/\rho$ da bi jednadžbu napisali u što općenitijem obliku[2]. Jednadžbe posve istoga oblika pojavit će se i u drugim fizičkim situacija, npr. pri razmatranju zvuka (poglavlje 6) ili svjetlosti (poglavlje 8). Pokažimo ovdje da je valna funkcija 4.3 formalno rješenje ove valne jednadžbe; izračunajmo prvo potrebne druge derivacije:

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[A\sin\left(\omega t - kz\right)\right] = -A\omega^2 \sin\left(\omega t - kz\right) = -\omega^2 u(z,t) \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[A\sin\left(\omega t - kz\right)\right] = -A(-k)^2 \sin\left(\omega t - kz\right) = -k^2 u(z,t) \quad .$$

Uvrštavanjem u valnu jednadžbu 4.3 dobivamo:

$$-\omega^2 u(z,t) = -c^2 k^2 u(z,t) \quad ,$$

što će biti ispunjeno ako vrijedi:

$$c = \frac{\omega}{k} \quad . \tag{4.6}$$

Kasnije ćemo vidjeti da je c veličina koju zovemo "fazna brzina" vala; za sada možemo **zaključiti** da valna funkcija $A\sin\left(\omega t - kz\right)$ jest rješenje gornje valne jednadžbe (izraz 4.5) uz uvjet $c = \omega/k$, a da je pri tome amplituda A konstantna u vremenu i prostoru (što smo prije pretpostavili, a sada i dokazali).

Je li $A\sin\left(\omega t - kz\right)$ *jedino* rješenje valne jednadžbe 4.5? Odgovor je **ne** - lako se provjerava da je i $f\left(\omega t - kz\right)$, gdje je $f(x)$ proizvoljna neprekidna i glatka funkcija, također rješenje ove valne jednadžbe! Pokažimo to; pogledajmo prvo jednu prvu derivaciju:

$$\frac{\partial f\left(\omega t - kz\right)}{\partial t} = \frac{\partial f\left(\omega t - kz\right)}{\partial\left(\omega t - kz\right)}\frac{\partial\left(\omega t - kz\right)}{\partial t} = \omega\frac{\partial f\left(\omega t - kz\right)}{\partial\left(\omega t - kz\right)} \quad .$$

Još jednim parcijalnim deriviranjem očito ćemo dobiti:

$$\frac{\partial^2 f\left(\omega t - kz\right)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f\left(\omega t - kz\right)}{\partial\left(\omega t - kz\right)^2}\left(\frac{\partial\left(\omega t - kz\right)}{\partial t}\right)^2 = \omega^2\frac{\partial^2 f\left(\omega t - kz\right)}{\partial\left(\omega t - kz\right)^2} \quad ;$$

Analogno:

$$\frac{\partial^2 f\left(\omega t - kz\right)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f\left(\omega t - kz\right)}{\partial\left(\omega t - kz\right)^2}\left(\frac{\partial\left(\omega t - kz\right)}{\partial z}\right)^2 = k^2\frac{\partial^2 f\left(\omega t - kz\right)}{\partial\left(\omega t - kz\right)^2} \quad ;$$

direktnim uvrštavanjem u valnu jednadžbu 4.5, lako se provjerava ispravnost pretpostavljenog rješenja, ako je ispunjen uvjet 4.6. Dakako, kao i kod sinusiodalne valne funkcije (izraz 4.3), promjenom predznaka u argumentu dobivamo val koji se širi u suprotnom smjeru.

Dakle, bilo koja "pristojna" funkcija f zadovoljavat će valnu jednadžbu ako kao argument u nju stavljamo (do na konstantu) točno određeni funkciju vremena i prostornih koordinata $(\omega t - kz)$. Nas će u ovom poglavlju prvo zanimati valovi nastali isključivo sinusoidalnom pobudom, da bi na kraju poglavlja pokazali da bilo kakvu vremensku ovisnost titranja izvora vala možemo opisati razvojem po sinusoidalnim - zato ćemo od svih mogućih rješenja $f\left(\omega t - kz\right)$ razmatrati samo rješenja oblika $A\sin\left(\omega t - kz\right)$.

Ovdje je važno napomenuti da valna jednadžba 4.5 (izvedena za sada samo za elastičnu nit) nije jedini mogući oblik valne jednadžbe - takva je npr. i Klein-Gordonova jednadžba koju ćemo diskutirati kasnije u ovom poglavlju. Njeno će rješenje u nekim slučajevima biti analogno ovdje diskutiranoj valnoj funkciji (izraz 4.3), no postojat će i situacije u kojima ćemo morati posegnuti za drugačijim oblikom rješenja.

[2]Ovakav oblik valne jednadžbe već smo sreli pri diskusiji elektromagnetskih valova na "Općoj fizici 2".

4.1.2 Kutni valni broj vala

Vratimo se razmatranjima diskretnog sustava puno tijela međusobno razmaknutih za udaljenost a. Prostorni period valne funkcije naziva se **valna duljina** λ. Valna duljina λ je (prostorni) period ponavljanja veličine u, pa se pri pomaku duž osi z za Δz=λ, argument sinusa u izrazu 4.3 mora promijeniti za 2π:

$$k\lambda = 2\pi \quad ,$$

iz čega zaključujemo da vrijedi:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad ,$$

odnosno da je k veličina koju smo prije (str. 30) definirali kao kutni valni broj. I ovdje je, kao kod titranja u modovima, valni broj povezan s prostornim položajima (oblikom) čestica koje titraju.

Usporedimo valno titranje s titranjem složenog sustava u raznim modovima (koje smo razmatrali uprvom poglavlju). Kod modova smo imali (vidi npr. izraz 1.27):

$$u^{(n)}(z_i, t) = A^{(n)} \sin\left(k^{(n)} z_i\right) \cos\left(\omega^{(n)} t\right) \quad ;$$

u danom modu čestice titraju bez međusobnog faznog kašnjenja, a amplitude im nisu općenito jednake. U ovdje razmatranom slučaju putujućeg vala čestice titraju istom amplitudom i frekvencijom, ali s različitim fazama (kašnjenjem).

Postoje li kod putujućih valova ograničenja na vrijednost kutnog valnog broja k? Kod modova smo zbog rubnih uvjeta imali samo određene vrijednosti za k:

$$k^{(1)} L = \pi \quad , \quad k^{(2)} L = 2\pi \quad , \quad \ldots \quad , \quad k^{(N)} L = N\pi \quad .$$

Kod valova na izvoru imamo u_0=$A\sin(\omega t)$, što je svojevrstan rubni uvjet (koji nije konstantan u vremenu), no sustav je po pretpostavci na drugom rubu beskonačan (pa s te strane nema nikakvog rubnog uvjeta). Stoga **ne postoji** zahtjev da elongacija na rubovima mora iščezavati, odnosno nema ograničenja na valni broj k - isti može poprimiti kontinuirano sve vrijednosti u intervalu:

$$0 \leq k \leq \frac{\pi}{a} \quad ;$$

(gornju ćemo granicu objasniti u nastavku).

Pogledajmo par zanimljivih specijalnih slučajeva:
I) k=0 $\Rightarrow$ ka=0; u ovom slučaju nema faznog kašnjenja između susjednih čestica (valna duljina vala je beskonačna).
II) $ka \ll 1$; kada je ispunjen ovaj uvjet, fazno kašnjenje između susjednih čestica je maleno, a valna duljina vrlo velika - riječ je, dakle, o “dugovalnom” slučaju.
III) ka=π; fazno kašnjenje između susjednih čestica iznosi polovicu perioda i čestice se nalaze u “cik-cak” konfiguraciji.

Kutni valni brojevi veći od π/a nemaju fizičko opravdanje - odgovarajuća valna duljina bila bi kraća od dvostruke udaljenosti među česticama $2a$ i u tom slučaju sigurno postoji i sinusoida valne duljine veće od $2a$ (za koju je $k \leq \pi/a$) koja može opisati otklone svih čestica u danom trenutku. Zašto valna duljina ne smije biti manja od $2a$ (odnosno pola valne duljine od a)? Zato jer bi to značilo da sustav mijenja smjer i na mjestima gdje uopće nema čestica, a to je, dakako, nemoguće.

4.1.3 Disperzijska relacija

I dalje razmatramo polubeskonačan (diskretan) sustav puno tijela međusobno razmaknutih za udaljenost a (dan npr. na slici 4.1). Pogledajmo sada ovisnost kutne frekvencije ω o kutnom valnom broju k. Kod modova su dozvoljene vrijednosti kutnog valnog broja $k^{(n)}$ bile povezane s frekvencijama $\omega^{(n)}$ preko disperzijske relacije (izraz 1.29). Koje su frekvencije moguće kod putujućih valova i da li su vezane s valnim brojem k?

Pokušajmo naći vezu valnog broja k i frekvencije ω krećući od jednadžbe gibanja za i-tu česticu:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 u_i}{\mathrm{d}t^2} = -K\left(u_i - u_{i-1}\right) + K\left(-u_i + u_{i+1}\right) \quad . \tag{4.7}$$

Ta je jednadžba identična jednadžbi 1.18 od koje smo započeli izvod disperzijske relacije za modove jer se dva sustava razlikuju samo na rubovima, ali ne i u okolini proizvoljne ne-rubne čestice i. Pretpostavljajući da otklon iz položaja ravnoteže ima oblik dan izrazom 1.19, za modove smo dobili disperzijsku relaciju 1.21 (koju smo kasnije napisali i preko valnog broja k, izraz 1.29).

Putujući val opisan je drukčijom funkcijom (izraz 4.3) od moda, no njegovo uvrštavanje u gornju jednadžbu gibanja dovest će nas do posve iste disperzijske relacije. Pokažimo to eksplicitno; krećemo od izraza 4.3:

$$u_i(t) = A\sin\left(\omega t - kz_i\right) \quad ,$$

gdje je $z_i{=}ia$. Za “susjede” i-te čestice stoga vrijedi:

$$u_{i-1}(t) = A\sin\left[\omega t - k(i-1)a\right] = A\sin\left(\omega t - kia\right)\cos\left(ka\right) + A\cos\left(\omega t - kia\right)\sin\left(ka\right) \quad ,$$

$$u_{i+1}(t) = A\sin\left[\omega t - k(i+1)a\right] = A\sin\left(\omega t - kia\right)\cos\left(ka\right) - A\cos\left(\omega t - kia\right)\sin\left(ka\right) \quad ,$$

$$u_{i-1}(t) + u_{i+1}(t) = 2A\sin\left(\omega t - kia\right)\cos\left(ka\right) \quad .$$

Derivacija po vremenu lijeve strane jednadžbe gibanje trivijalno se izvrijedni, pa dobivamo prvo:

$$-m\omega^2 u_i = -K\left(2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}\right) \quad ,$$

te uvrštavanjem u_i i $u_{u\pm 1}$ konačno:

$$-m\omega^2 A\sin\left(\omega t - kia\right) = -K\left[2A\sin\left(\omega t - kia\right) - 2A\sin\left(\omega t - kia\right)\cos\left(ka\right)\right] \quad ,$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m}2\left[1 - \cos\left(ka\right)\right] = \frac{4K}{m}\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) \quad ,$$

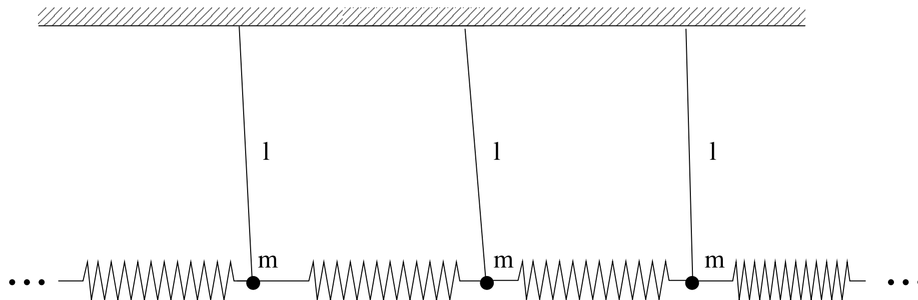
$$\omega = \sqrt{\frac{4K}{m}}\sin\left(\frac{ka}{2}\right) \quad . \tag{4.8}$$

Dobivena *disperzijska relacija* identična je onoj dobivenoj za modove (izraz 1.29) - sustavu je očito svejedno titraju li njegove čestice u modovima ili kao putujući val. Budući da valni broj k kod putujućih valova poprima proizvoljne vrijednosti, isto vrijedi i za frekvenciju ω (i to je različito nego kod modova). Možemo **zaključiti**: uvjet da $u_i{=}A\sin\left(\omega t - kz_i\right)$ bude rješenje jednadžbe gibanja (izraz 4.7) sustava prikazanog na slici 4.1 jest taj da valni broj k i frekvencija ω budu vezani disperzijskom relacijom 4.8.

Sva dosadašnja razmatranja napravljena su za transverzalno titranje čestica: čestice su se gibale okomito na smjer prostiranja sustava. Jedini razlog za taj izbor je činjenica da se transverzalne oscilacije mogu lakše i jasnije vizualizirati od longitudinalnih - no sva bitna fizika (pa i gornja disperzijska relacija) i za njih ostaje ista (kao što je pokazano u prvom poglavlju).

4.1.4 Sustavi s minimalnom frekvencijom titranja različitom od nule

Pogledajmo malo kompliciraniji sustav od onog razmatranog do sada (i prikazanog na slici 4.1). I dalje imamo polubeskonačan sustav čestica vezanih oprugama, no sada je svaka od čestica vezana s okolinom - tu ćemo vezu realizirati kao na slici 4.7 neelastičnim nitima identične duljine, pa sada imamo kombinaciju opruga i njihala, kao u potpoglavlju 1.2.3.



Slika 4.7: Polubeskonačan sustav masa na njihalima vezanih oprugama.

Jednadžba gibanja za ovaj sustav je ista kao u izrazu 4.7, jedino ima dodatni član koji odgovara povratnoj sili njihala:

$$m\frac{\mathrm{d}^2u_i}{\mathrm{d}t^2} = -mg\frac{u_i}{l} - K\left(u_i - u_{i-1}\right) + K\left(-u_i + u_{i+1}\right) \quad . \tag{4.9}$$

Bez tog dodatnog člana, ova nas jednadžba u aproksimaciji kontinuuma dovela do valne jednadžbe (izraz 1.26 na str. 27) - ponavljanjem tog postupka, dobili bi istu jednadžbu s jednim dodatnim članom (koji je posljedica niti uvedenih u sustav):

$$\frac{\partial^2u(z,t)}{\partial t^2} = -\omega_0^2u(z,t) + \frac{Ka^2}{m}\frac{\partial^2u(z,t)}{\partial z^2} \quad , \tag{4.10}$$

gdje je ω_0=$\sqrt{g/l}$. Valna jednadžba ovog oblika naziva se **Klein-Gordonovom jednadžbom** i pojavljuje se u raznim dijelovima fizike. Iako je frekvencija ω_0 u jednadžbu "ušla" kao "potpis" dodatnih njihala konkretnog sustava sa slike 4.7, nju možemo iskoristiti za opis bilo kakvog vezanja sustava s okolinom, neovisno o karakteru same veze.

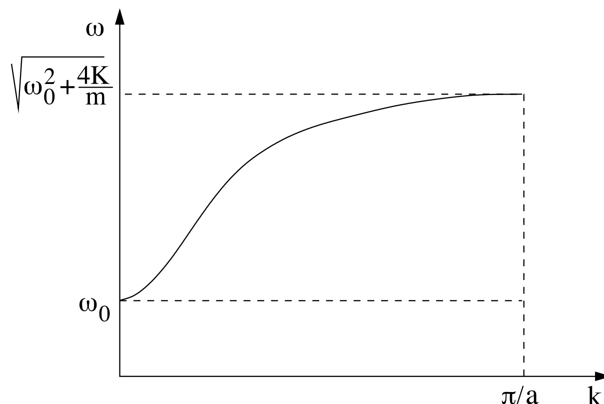
Vratimo se sada na diskretnu verziju problema - dakle, ne razmatramo više aproksimaciju kontinuuma. Provjerimo prvo opisuje li valna funkcija 4.3 ponašanje i ovakvog kompliciranijeg sustava. Uvrstimo li u jednadžbu 4.9 probno rješenje u_i=$A\sin\left(\omega t - kz_i\right)$, postupkom analognom onom sa str. 82 dobit ćemo:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{K}{m}2\left[1-\cos\left(ka\right)\right] = \omega_0^2 + \frac{4K}{m}\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) \quad ,$$

Drugi član u ovoj jednadžbi je, dakako, jednak kao i prije - novost je pojavljivanje prvog člana koji je očito posljedica vezanja sustava s okolinom. Dakle, *disperzijska relacija* u ovakvom sustavu postaje:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{4K}{m}\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)} \quad , \tag{4.11}$$

što je prikazano na slici 4.8. Za ω_0=0 dobivamo "običnu" disperzijsku relaciju dobivenu ranije (izraz 4.8).



Slika 4.8: Disperzijska relacija 4.11.

Za svaki mogući valni broj k između graničnih vrijednosti 0 i π/a, postoji odgovarajuća frekvencija ω između $\omega_{\min}=\omega_0$ i $\omega_{\max}=\sqrt{\omega_0^2+\frac{4K}{m}}$. No, u praksi je frekvencija ω ta koja se nameće sustavu (npr. "strojem za proizvodnju valova" na slici 4.1), a ne valni broj k. Ako je frekvencija ω unutar intervala $\omega_{\min}$ do $\omega_{\max}$, nastaje valno gibanje s pripadnim valnim brojem k koji se računa iz relacije 4.11. No što se zbiva ako nametnuta frekvencija ω nije unutar intervala $\omega_{\min}-\omega_{\max}$? Da bi odgovorili na ovo pitanje, pogledajmo zasebno prvo slučaj $\omega<\omega_{\min}$, a zatim i slučaj $\omega>\omega_{\max}$. U oba slučaja *ne postoji* odgovarajući valni broj k, nema odgovarajućeg kašnjenja čestica, pa ni valnog gibanja kao takvog - rješenje jednadžbe gibanja 4.9 stoga *ne može* imati oblik valne funkcije 4.3, već moramo potražiti druge prikladne oblike.

I) $\omega<\omega_{\min}$;
Budući da izvor (rub sustava) nametnuto titra na način opisan ovdje:

$$u_0(t)=A\sin(\omega t) \quad .$$

mora se nešto slično događati i s prvom i svim daljnjim česticama. Budući da ne postoji odgovarajući valni broj k (koji bi zadovoljio disperzijsku relaciju), nema načina da se poremećaj prenese s kašnjenjm - pokušajmo naći rješenje jednadžbe gibanja 4.9 pretpostavljajući titranje čestica bez kašnjenja, ali s različitim amplitudama:

$$u_1(t)=A_1\sin(\omega t) \quad ,$$

$$u_2(t)=A_2\sin(\omega t) \quad ,$$

$$\dots$$

$$u_i(t)=A_i\sin(\omega t) \quad ,$$

$$\dots$$

Uvrštavanjem u jednadžbu gibanja 4.9 dobivamo:

$$-mA_i\omega^2\sin(\omega t)=-\frac{mg}{l}A_i\sin(\omega t)-K\left[2A_i\sin(\omega t)-(A_{i-1}+A_{i+1})\sin(\omega t)\right] \quad ,$$

što dijeljenjem sa $-mu_i$ daje:

$$\omega^2=\omega_0^2+\frac{K}{m}\left(2-\frac{A_{i-1}+A_{i+1}}{A_i}\right) \quad . \tag{4.12}$$

Uvjet $\omega<\omega_{\min}=\omega_0$ može biti ostvaren samo ako vrijedi:

$$\frac{A_{i-1}+A_{i+1}}{A_i}>2 \quad , \tag{4.13}$$

odnosno:

$$\frac{A_{i-1}+A_{i+1}}{2} > A_i \quad .$$

Ovaj uvjet moguće je zadovoljiti samo ako je A_i monotona funkcija - ili rastuća ili padajuća. Rastuća amplituda je problematična s energijskog aspekta (veća amplituda znači i veću energiju titranju), pa zaključujemo da se amplitude A_i smanjuju.

Budući da svaka čestica igra ulogu izvora za sljedeće čestice, logično je pretpostaviti i to da omjer amplituda uzastopnih čestica mora biti konstantan; uvedimo ga na sljedeći način:

$$\frac{A_i}{A_{i-1}} = e^{-\kappa a} \quad ,$$

iz čega slijedi (uz z_i=ia):

$$A_i = Ae^{-\kappa z_i} \quad .$$

Veličina κ naziva se koeficijent ili konstanta atenuacije ili prigušivanja (upotreba termina "konstanta atenuacije" je češća, no zbunjujuća jer je riječ o veličini koja nije nužno konstantna). Uz ovakvu definiciju dobiva se:

$$\frac{A_{i-1}+A_{i+1}}{A_i} = \frac{Ae^{-\kappa(i-1)a}+Ae^{-\kappa(i+1)a}}{Ae^{-\kappa ia}} = e^{\kappa a}+e^{-\kappa a} = 2\cdot\cosh(\kappa a) \quad .$$

Budući da za svaki pozitivan argument κa vrijedi $\cosh(\kappa a) > 1$, vidimo da je ispunjen uvjet 4.13. Iskoristimo još relaciju:

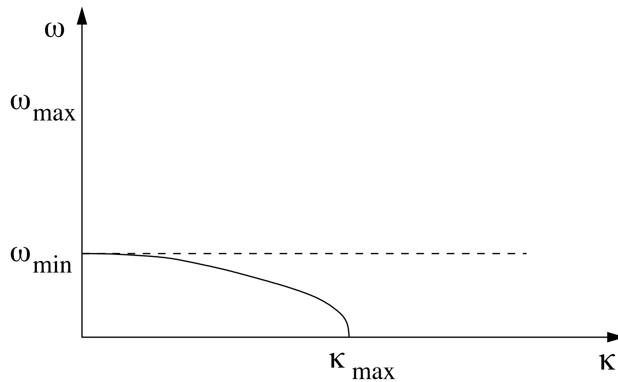
$$\cosh\alpha - 1 = 2\cdot\sinh^2\frac{\alpha}{2} \quad ,$$

pa krećući od izraza 4.12 možemo dobiti:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{K}{m}\left(2 - \frac{A_{i-1}+A_{i+1}}{A_i}\right) = \omega_0^2 + \frac{K}{m}\left[2 - 2\cdot\cosh(\kappa a)\right] = \omega_0^2 - \frac{4K}{m}\left(\sinh^2\frac{\kappa a}{2}\right) \quad ,$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{4K}{m}\left(\sinh^2\frac{\kappa a}{2}\right)} \quad .$$

Ova veza između frekvencije ω i koeficijenta atenuacije κ prikazana je na slici 4.9.



Slika 4.9: Frekvencija ω kao funkcija koeficijenta atenuacije κ za slučaj ω<$\omega_{\min}$.

Za $\omega \to \omega_{\min}$ dolazi do spajanja rješenja za $k \to 0$ (nema kašnjenja, $\lambda \to \infty$) i $\kappa \to 0$ (nema opadanja amplitude). S druge strane, u limesu $\omega \to 0$ (statički slučaj, nema oscilacija), amplituda opada maksimalno brzo (tj. koeficijent atenuacije je maksimalan):

$$\omega_0^2 - \frac{4K}{m}\left(\sinh^2\frac{\kappa a}{2}\right) = 0 \quad ,$$

$$\kappa_{\max} = \frac{2}{a} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{m\omega_0^2}{4K}} \quad .$$

Vrijednost maksimalnog koeficijenta atenuacije ovisi o parametrima sustava.

II) $\underline{\omega > \omega_{\max}}$;

Ni u ovom limesu ne postoji k (putujućeg vala) koji zadovoljava disperzijsku relaciju, pa ćemo opet pretpostaviti rješenje oblika:

$$u_i(t) = A_i \sin(\omega t) \quad ;$$

tj. titranje bez kašnjenja, ali s promjenljivom amplitudom. Uvrštavanjem u jednadžbu gibanja opet dobivamo izraz 4.12:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{K}{m}\left(2 - \frac{A_{i-1} + A_{i+1}}{A_i}\right) \quad , \tag{4.14}$$

no ovaj put zahtjevamo da je $\omega > \omega_{\max}$, tj.:

$$\omega^2 > \omega_{\max}^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{m} \quad .$$

Kombiniranjem gornja dva zahtjeva dolazimo do uvjeta:

$$\frac{A_{i-1} + A_{i+1}}{A_i} < -2 \quad .$$

Jedini način da se ovaj uvjet zadovolji *za svaki i* je taj da vrijedi:
a) za parne vrijednosti argumenta i predznak amplitude A_i je suprotan od predznaka za neparne i;
b) apsolutne vrijednosti $|A_i|$ ili monotono rastu ili monotono padaju - kao i u slučaju I) biramo monotoni pad.
Ovi uvjeti vode na sljedeću ovisnost ovisnost amplitude o položaju čestice z_i (tj. njenom indeksu i):

$$A_i = A(-1)^i e^{-\kappa z_i} = A(-1)^i e^{-\kappa i a} \quad .$$

Amplitude tvore cik-cak kofiguraciju (ili njen longitudinalan analogon) s opadajućim iznosima. Dalje imamo:

$$\frac{A_{i-1} + A_{i+1}}{A_i} = -\left(e^{\kappa a} + e^{-\kappa a}\right) = -2 \cdot \cosh(\kappa a) \quad ,$$

što je manje od -2, kao što smo i zahtijevali. Iskoristimo još relaciju:

$$\cosh\alpha + 1 = 2 \cdot \cosh^2 \frac{\alpha}{2} \quad ,$$

pa krećući od izraza 4.14 možemo dobiti:

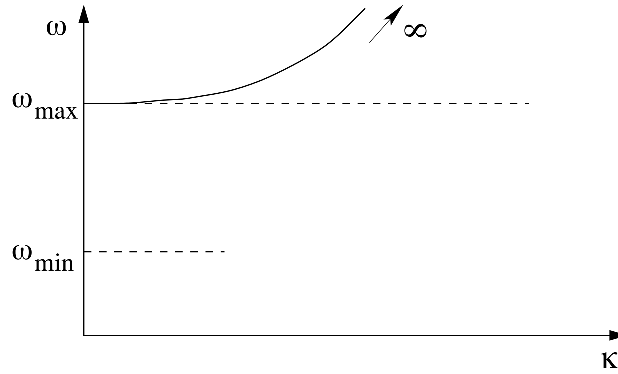
$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{K}{m}\left(2 - \frac{A_{i-1} + A_{i+1}}{A_i}\right) = \omega_0^2 + \frac{K}{m}\left[2 + 2 \cdot \cosh(\kappa a)\right] = \omega_0^2 + \frac{4K}{m}\left(\cosh^2 \frac{\kappa a}{2}\right) \quad ,$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{4K}{m}\left(\cosh^2 \frac{\kappa a}{2}\right)} \quad .$$

Ova veza između frekvencije ω i koeficijenta atenuacije κ prikazana je na slici 4.10.

Za $\omega \to \omega_{\max}$ dolazi do spajanja rješenja za $k \to \pi/2$ (val s cik-cak konfiguracijom amplituda čestica) i $\kappa \to 0$ (cik-cak konfiguracija bez kašnjenja i bez atenuacije). Za $\omega \to \infty$ koeficijent atenuacije toliko raste da na dovoljno visokim frekvencijama praktički titra samo izvor.

Zaključak: kada je nametnuta frekvencija između $\omega_{\min}$ i $\omega_{\max}$ sustavom se širi putujući val valnog broja k određenog disperzijskom relacijom 4.8; ako je nametnuta frekvencija manja od $\omega_{\min}$ (gornji slučaj I) ili veća od $\omega_{\max}$ (gornji slučaj II) **izvor ne može emitirati val u sredstvo**, već se titranje guši duž smjera prostiranja sustava.



Slika 4.10: Frekvencija ω kao funkcija koeficijenta atenuacije κ za slučaj $\omega > \omega_{\text{max}}$.

Demonstracijski pokus 4.1: širenje vala u ovisnosti o nametnutoj frekvenciji

Važno uočiti: tri kvalitativno različita slučaja: $0 < \omega < \omega_{\text{min}}$ - opadajuća amplituda titranja; $\omega_{\text{min}} < \omega < \omega_{\text{max}}$ - emitiranje vala; $\omega > \omega_{\text{max}}$ - cik-cak opadajuća amplituda titranja.

4.1.5 Fazna brzina vala

I dalje razmatramo polubeskonačan (diskretan) sustav puno tijela međusobno razmaknutih za udaljenost a (dan npr. na slici 4.1). Neka se u sredstvu širi val opisan s izrazom 4.3:

$$u(z,t) = A \sin(\omega t - kz) \quad .$$

Pogledajmo česticu na nekom mjestu z' - ona u vremenu titra frekvencijom ω (t je jedina varijabla u gornjoj funkciji ako fiksiramo z). U nekom trenutku t' čestica će imati fazu titranja ϕ jednaku:

$$\phi = \omega t' - kz' \quad .$$

Neka druga čestica na položaju $z'' > z'$ titra s kašnjenjem - danu fazu ϕ će stoga postići u nekom kasnijem tranutku $t'' > t'$, za koji vrijedi:

$$\omega t' - kz' = \phi = \omega t'' - kz'' \quad .$$

Za konkretnu vrijednost faze ϕ možemo izabrati bilo koji iznos. Okom se najlakše prati faza $\phi = \pi/2$, koja odgovara maksimumu titranja. Sređivanjem dobivamo:

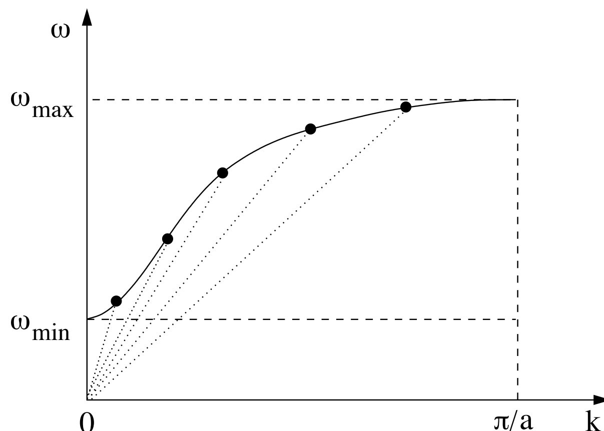
$$k\left(z'' - z'\right) = \omega\left(t'' - t'\right) \quad ,$$

$$k\Delta z = \omega \Delta t \quad .$$

Vidimo da se položaj dane faze jednolično pomiče duž osi z, pa možemo uvesti **faznu brzinu** v_ϕ:

$$v_\phi = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} \quad .$$

Fazna brzina pokazuje, dakle, kojom brzinom putuje neka faza (npr. maksimum) titranja čestice u valu. Za kontinuum ona je jednaka veličini c koju smo uveli valnom jednadžbom 4.5 u potpoglavlju 4.1.1.



Slika 4.11: Fazna brzina valova koji zadovoljavaju disperzijsku relaciju 4.11.

Budući da vrijedi ω=$2\pi\nu$=$2\pi/T$ i k=$2\pi/\lambda$, za faznu brzinu vrijedi i:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T} \quad .$$

Faznu brzinu na jednostavan način možemo odrediti izravno iz disperzijske krivulje - pogledajmo slučaj za sustav prikazan na slici 4.7. Disperzijska krivulja za taj sustav prikazana je na slici 4.11 (i ranije na slici 4.8).

Svaka točka na disperzijskoj krivulji predstavlja mogući par vrijednosti (k,ω) za neki val. Ako ishodište spojimo s odabranom točkom na disperzijskoj krivulji, dobivamo pravac kojemu je koeficijent smjera upravo ω/k, tj. fazna brzina. Iz slike 4.11 vidimo da je koeficijent smjera (a time i fazna brzina) najmanji kada je frekvencija ω blizu maksimalne vrijednosti, dok za vrlo malene frekvencije fazna brzina teži k beskonačnosti. To se vidi i iz izraza:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{k}\sqrt{\omega_0^2 + \frac{4K}{m}\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)} \quad ,$$

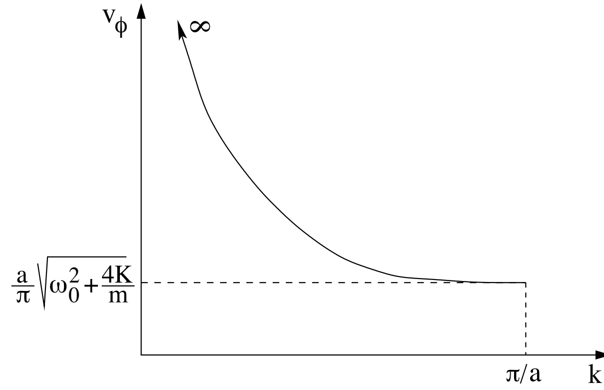
koji je predočen na slici 4.12.

Tendiranje beskonačnosti fazne brzine za vrlo malene vrijednosti valnog broja k može se činiti kontradiktorno osnovnom postulatu posebne teoriji relativnosti koji kaže da je brzina svjetlosti c najveća moguća brzina. No kontradikcije nema - posebna teorija relativnosti kaže da je c najveća brzina kojom se može gibati čestica, a ako je fazna brzina v_ϕ veća od c, to ne znači da se ijedna čestica giba takvom brzinom (već samo faza vala). Svaka čestica sustava titra oko svog položaja ravnoteže brzinom koja ni u kojemu trenutku ne dosiže c. Ako $k\rightarrow 0$, fazno kašnjenje je jako maleno, pa dvije vrlo udaljene čestice mogu imati blisku fazu i stići jedna drugu "u fazi" unutar nekog kratkog vremena. Gledamo li val, čini se kao da je maksimum u kratkom vremenu proputovao veliku udaljenost, no zapravo se ništa materijalno ne giba u smjeru širenja vala.

Demonstracijski pokus 4.2: promatranje fazne brzine

Važno uočiti: razliku između brzine gibanja tijela i fazne brzine.

Pogledajmo još specijalan slučaj ω_0=0 (npr. niz opruga s tijelima **bez** njihala) - disperzijska



Slika 4.12: Fazna brzina valova kao funkcija kutnog valnog broja k.

relacija tada ne ograničava moguće frekvencije odozdo (izraz 4.8):

$$\omega = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \quad ,$$

pa i fazna brzina ima drukčiji oblik:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{4K}{m}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \quad .$$

U limesu $k \to 0$ (u kojem smo prije imali diveregenciju), sada vrijedi:

$$v_\phi = \sqrt{\frac{4K}{m}} \cdot \lim_{k\to 0} \frac{\sin(ka/2)}{k} = \sqrt{\frac{4K}{m}}\frac{a}{2} = a\sqrt{\frac{K}{m}} \quad .$$

Fazna brzina za malene valne brojeve k postaje konstanta (i jednaka nagibu disperzijske krivulje u ishodištu). Fizička interpretacija je ta da za sve manje kašnjenje ($k \to 0$) imamo i sve sporije titranje ($\omega \to 0$), pa stanje iste faze putuje brzinom neovisnom o promjeni k i ω.

4.1.6 Val u kontinuumu

Podsjetimo se (vidi poglavlje 1.4) aproksimacija kojima s diskretnog sustava prelazimo na kontinuum:

$$a \to 0 \quad , \quad ka \ll 1 \quad ,$$

$$Ka \to T \quad , \quad \frac{m}{a} \to \rho \quad .$$

U elastičnoj niti, nadalje, pojedine čestice nisu vezane s okolinom (npr. obješene na njihala), pa nema minimalne frekvencije diskutirane u prošlom potpoglavlju ($\omega_{\min}$=ω_0=0). Jednadžba gibanja se tada svodi na izraz 1.25:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 u_i}{\mathrm{d}t^2} = Ka^2 \cdot \frac{1}{a}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{a} - \frac{u_i - u_{i-1}}{a}\right) \quad ,$$

što u limesu kontinuuma vodi na valnu jednadžbu 1.26:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} \quad .$$

U potpoglavlju 4.1.1 pokazali smo da valna funkcija 4.3 zbilja zadovoljava gornju valnu jednadžbu, uz sljedeći uvjet:

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{\rho}}k \quad .$$

Dakle, funkcija oblika $u(z,t){=}A\sin(\omega t - kz)$ bit će rješenje valne jednadžbe (izraz 1.26) za napetu elastičnu nit, samo ako vrijedi: $\omega{=}\sqrt{T/\rho}k$. Ovo je zapravo disperzijska relacija za kontinuum, izraz 1.24.

Ista relacija se može dobiti krećući od disperzijske relacije za diskretan slučaj (izraz 4.8), uz uzimanje limesa za kontinuum:

$$\omega = \lim_{ka\to 0}\sqrt{\frac{4K}{m}}\sin\left(\frac{ka}{2}\right) = \sqrt{\frac{4K}{m}}\cdot\frac{ka}{2} = 2\sqrt{\frac{Ka}{m/a}}\frac{k}{2} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}k \quad .$$

Pogledajmo sada faznu brzinu vala u kontinuumu:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad .$$

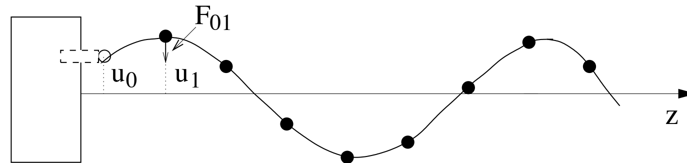
I ovaj se rezultat može dobiti kao limes diskretnog slučaja kada $ka{\to}0$:

$$v_\phi = \lim_{ka\to 0}\left[\sqrt{\frac{4K}{m}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{ka}{2}\right)}{k}\right] = \sqrt{\frac{4K}{m}}\cdot\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad .$$

Zaključujemo da u kontinuumu fazna brzina *ne ovisi* o frekvenciji ω, odnosno valnom broju k, već isključivo o parametrima elastičnog sredstva (T,ρ)!

4.2 Impedancija valnog sredstva

U ovom se poglavlju pitamo kolika je sila potrebna za tjeranje vala čije nastajanje smo razmatrali u prošlom poglavlju. Pogledajmo sustav kao na početku razmatranja o valovima, te silu kojom rub sustava djeluje preko opruge na prvu česticu (F_{01} na slici 4.13).



Slika 4.13: Nastanak vala u sustavu vezanih opruga: pogonska sila.

Izvor vala je preko opruge spojen na prvu česticu, te na nju djeluje silom:

$$F_{01} = -K(u_1 - u_0) = KA[\sin(\omega t) - \sin(\omega t - ka)] \quad .$$

Uočite da je u trenutku prikazanom na slici 4.13, sila F_{01} negativna jer djeluje prema položaju ravnoteže.

Silu kojom izvor djeluje na prvu česticu možemo povezati s odzivom te čestice, tj. njenim gibanjem: $u_1{=}A\sin(\omega t - ka)$. Pri tome ćemo koristiti sljedeću transformaciju:

$$\sin(\omega t) = \sin[(\omega t - ka) + ka] = \sin(\omega t - ka)\cos(ka) + \cos(\omega t - ka)\sin(ka) \quad .$$

Za silu F_{01} sada dobivamo:

$$\begin{aligned} F_{01} &= -K\left[1-\cos(ka)\right]A\sin(\omega t-ka)+K\sin(ka)\,A\cos(\omega t-ka)= \\ &= -K\left[1-\cos(ka)\right]u_1(t)+K\sin(ka)\,\frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} \quad . \end{aligned}$$

U trećem smo poglavlju definirali impedanciju kao veličinu koja povezuje pogonsku silu prisilnih oscilacija s odzivom (osciliranjem) čestice. Impedancija valnog sredstva će, analogno, biti veličina koja pokazuje koliko je teško uspostaviti valno gibanje u sredstvu, odnosno koliko se valno sredstvo opire stvaranju vala. Za razliku od običnog titranja, kod putujućih valova gibanje čestica (pa i prve) kasni za pogonskom silom izvora - stoga sila na svaku česticu (recimo prvu) ima komponentu koja je u fazi s otklonom čestice $u(t)$ i komponentu koja je u fazi s brzinom čestice $v(t)$. U skladu s definicijom iz prošlog poglavlja (3.34), faktore proporcionalnosti nazvat ćemo *disperzijska impedancija* Z_d:

$$Z_d = -K\left[1-\cos(ka)\right] \quad ,$$

i *apsorpcijska impedancija* Z_a:

$$Z_a = K\sin(ka)\,\frac{1}{\omega} \quad .$$

Uz ovakve zamjene izraz za silu F_{01} postaje:

$$F_{01} = Z_d u_1(t) + Z_a\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} \quad .$$

Apsorcijska impedancija odgovorna je za apsorpciju snage, dok se disperzijskom impedancijom energija raspršuje.

Što se dešava s daljnjim česticama? Izvor tjera prvu česticu na gibanje silom F_{01}, a prva čestica tjera drugu silom F_{12} koja je istog oblika, ali s faznim kašnjenjem. Općenito i-ta čestica djeluje kao izvor vala silom na susjednu česticu, rednog broja (i+1) - budući da postoji translacijska simetrija sustava, vrijedi:

$$F_{i,i+1} = Z_d u_{i+1}(t) + Z_a\frac{\mathrm{d}u_{i+1}}{\mathrm{d}t} \quad ,$$

gdje su Z_d i Z_a *neovisni o* indeksu i (za sustav sagrađen od identičnih opruga i identičnih tijela).

Dakako, po trećem Newtonovom zakonu vrijedi:

$$F_{i,i+1} = -F_{i+1,i} \quad ;$$

što ćemo koristiti u kasnijim izvodima.

4.2.1 Savršen završetak valnog sredstva

Neka je i-ta čestica zadnja čestica valnog sredstva. Postavimo neki uređaj na kraj valnog sredstva, tako da on na i-tu česticu djeluje silom $F_s(t)$ koja je jednaka onoj koju bi davala sljedeća čestica, rednog broja $(i+1)$, u slučaju beskonačnog valnog sredstva, tj.:

$$F_s = F_{i+1,i} \quad .$$

Uz takav uređaj i-ta čestica se ponaša isto kao i u beskonačnom valnom sredstvu i val se širi od izvora do i-te čestice, a zatim ga postavljeni uređaj "upije". U ovakvom scenariju postavljeni uređaj predstavlja **savršeni završetak** valnog sredstva; kasnijim ćemo primjerima objasniti potrebu za uvođenjem istoga (poanta je da kod savršenog završetka nema refleksija, odnosno "odbijanja" vala od njega). U praksi se za savršeni završetak valnog sredstva (osobito u električnim sklopovima)

koristi izraz *"terminator"*.

Nađimo potrebnu silu $F_s(t)$; procedura je vrlo slična onoj na str. 90:

$$F_s = F_{i+1,i} = K\,(u_{i+1} - u_i) = KA\,[\sin(\omega t - k(i+1)a) - \sin(\omega t - kia)] \quad ,$$

$$\sin[\omega t - k(i+1)a] = \sin(\omega t - kia)\cos(ka) - \cos(\omega t - kia)\sin(ka) \quad ,$$

$$\begin{aligned} F_s &= -K\,[1-\cos(ka)]\,A\sin(\omega t - kia) - K\sin(ka)\,A\cos(\omega t - kia) = \\ &= -K\,[1-\cos(ka)]\,u_i(t) - K\sin(ka)\,\frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \\ &= Z_d u_i(t) - Z_a\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} \quad . \end{aligned}$$

Dakle, da bi neki uređaj djelovao kao savršeni završetak, potrebno je da na kraj valnog sredstva (tj. na i-tu česticu) djeluje nekom elastičnom silom koja vraća i-tu česticu u položaj ravnoteže:

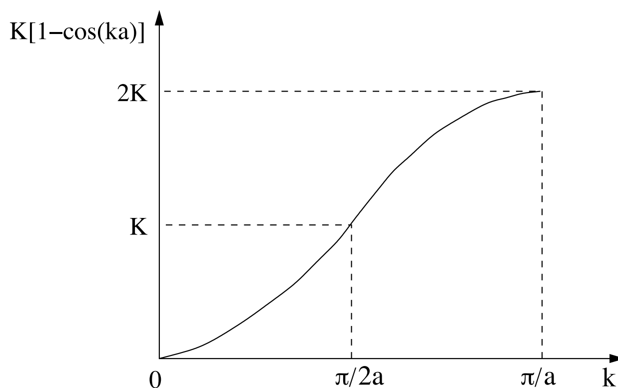
$$F_{\mathrm{el}} = Z_d u_i = -K\,[1-\cos(ka)]\,u_i \quad ,$$

te nekom silom trenja:

$$F_{\mathrm{tr}} = -Z_a\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = -K\sin(ka)\,\frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} \quad .$$

Sila trenja proporcionalna je brzini čestice na koju djeluje, kao kod gušenog harmoničkog oscilatora.

Vidimo da F_{el} i F_{tr} ovise o valnom broju k. Stoga za svaku frekvenciju vala (odnosno odgovarajući valni broj) moramo izvršiti ugađanje uređaja želimo li da djeluje kao savršeni završetak. Disperzijska impedancija (točnije, njena apsolutna vrijednost) prikazana je kao funkcija valnog broja k na slici 4.14.



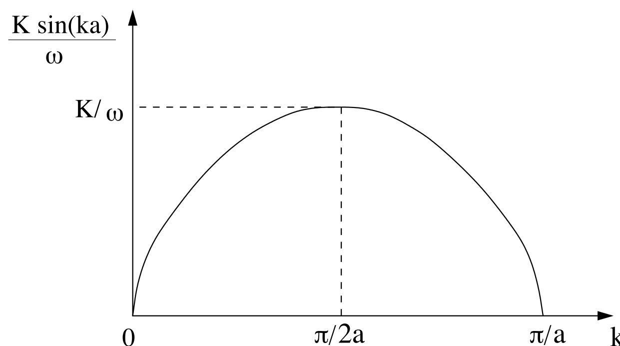
Slika 4.14: Iznos disperzijske impedancije u ovisnosti o valnom broju k.

U izrazu za apsorpcijsku impedanciju Z_a, osim valnog broja k, pojavljuje se i frekvencija ω - zato pri izvrijednjavanju ove komponente treba uzeti u obzir i disperzijsku relaciju $\omega(k)$. Ovisno o tome je li $\omega_{\min}$ jednako nuli ili ne, dobit ćemo različite ovisnosti Z_a o k; slučaj kada $\omega_{\min}\neq 0$ prikazan je na slici 4.15.

Pogledajmo par zanimljivih posebnih slučajeva:

I) $ka \ll 1$ (dugovalni limes, $\omega\approx\omega_{\min}$): $F_{el}=Z_d u_i\approx 0$ - praktički nije potrebna elastična sila. Sila trenja je proporcionalna s $K/\omega\cdot ka$ (argument sinusa je malen!), što je puno manje od K/ω - dakle, i sila trenja (gušenja) potrebna za savršen završetak je malena.

II) $ka=\pi/2$; u ovom je limesu $F_{el}=Z_d u_i=-K u_i$ - potrebna je elastična sila kao da i-tu česticu



Slika 4.15: Iznos apsorpcijske impedancije u ovisnosti o valnom broju k.

vežemo oprugom konstante K za nepomičan ("čvrst") kraj na lokaciji z_{i+1}. Apsorpcijska amplituda je jednaka K/ω, pa zaključujemo da je potreban maksimalan koeficijent trenja.
III) $ka{\approx}\pi$ ("cik-cak" konfiguracija): za elastičnu silu dobivamo $F_{el}{=}{-}2Ku_i$ (maksimalna sila koja odgovara dvoma oprugama vezanim za nepomičan kraj na lokaciji z_{i+1}), a za koeficijent sile trenja $K/\omega{\cdot}(\pi{-}ka){\ll}\ K/\omega$ (potrebno je vrlo maleno trenje).

Demonstracijski pokus 4.3: ugađanje završetka valnog sredstva

Važno uočiti: tri različita slučaja diskutirana ranije.

4.2.2 Prijenos snage putem vala

Pokažimo da putujući val širenjem prenosi energiju. Krenimo od izvora - on na prvu česticu djeluje silom:

$$F_{01} = Z_d u_1(t) + Z_a \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} \quad .$$

Usrednjena snaga koju izvor predaje prvoj čestici je stoga:

$$\begin{aligned}
\langle P_{01}\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T F_{01}v_1\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \left(Z_d u_1(t) + Z_a\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T Z_d A\sin(\omega t - ka)\, A\omega\cos(\omega t - ka)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T Z_a A^2\omega^2\cos^2(\omega t - ka)\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{Z_d A^2\omega}{T}\int_0^T \sin(\omega t - ka)\cos(\omega t - ka)\,\mathrm{d}t + \frac{Z_a A^2\omega^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - ka)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + \frac{1}{2}\omega^2 A^2 Z_a = \frac{1}{2}\omega^2 A^2 Z_a \quad . \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Snaga koju izvor emitira u valno sredstvo očekivano je proporcionalna apsorpcijskoj impedanciji Z_a valnog sredstva, kvadratu frekvencije, te kvadratu amplitude titranja.

Gdje se ta snaga troši? Prva čestica igra ulogu izvora vala za drugu i stoga joj predaje snagu:

$$\langle P_{12}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T F_{12}v_2\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\omega^2 A^2 Z_a \quad .$$

Dakle, snaga koju izvor emitira prenosi se s čestice na česticu.

Neka je i-ta čestica zadnja, te neka je na nju vezan savršen završetak. On djeluje na i-tu česticu silom F_s i time joj prenosi snagu:

$$\langle P_s\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T F_s v_i \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \left(Z_d u_1(t) - Z_a\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\omega^2 A^2 Z_a = -\langle P\rangle \quad .$$

Savršeni završtak valnog sredstva **apsorbira** (negativan predznak znači da preuzima energiju) svu snagu koju izvor emitira. **Zaključujemo**: valno sredstvo ne troši snagu, nego je samo prenosi od izvora do savršenog završetka kao potrošača.

4.2.3 Impedancija kontinuuma

Pogledajmo disperzijsku i apsorpcijsku impedanciju u granici kontinuuma ($ka \ll 1$):

$$Z_d = \lim_{ka\to 0}(-)K\left[1-\cos(ka)\right] = 0 \quad ,$$

$$Z_a = \lim_{ka\to 0} K\sin(ka)\frac{1}{\omega} = Ka\frac{k}{\omega} = T\sqrt{\frac{\rho}{T}} = \sqrt{T\rho} \quad .$$

Dakle, u kontinuumu imamo samo apsorpcijsku impedanciju koja je neovisna o frekvenciji ω (odnosno valnome broju k), te ovisi samo o parametrima sredstva (T,ρ).

Budući da je disperzijska impedancija kod kontinuuma jednaka nuli, pri razmatranju kontinuuma obično se izostavlja indeks a u impedanciji (sva impedancija je apsorpcijska, pa se indeks a podrazumijeva). Tako u **zaključku** pišemo: svaka točka elastičnog kontinuuma djeluje na nastavak kontinuuma silom:

$$F = Z\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \quad ,$$

čime je definirana impedancija koja za dano sredstvo iznosi:

$$Z = \sqrt{T\rho} \quad .$$

4.3 Refleksija i transmisija valova

Razmatranje refleksije i transmisije valova ograničit ćemo na **kontinuum**, jer je riječ o najčešćem i najvažnijem slučaju u praksi, koji uključuje sve fizički zanimljive pojave koje se pojavljuju u općenitim sustavima (razmatranje "diskretnih" sustava matematički je kompliciranije, a ne vodi na pojave kojih nema kod kontinuiranih sustava). Valnom sredstvu koje ćemo razmatrati dozvolit ćemo da na kraju ima **nesavršeni završetak**, koji ima apsorpcijsku impedanciju $Z_n \neq Z$ - cilj poglavlja nam je diskutirati što se dešava valu koji pada na takav završetak, u ovisnosti o vrijednosti imepdancije Z_n.

4.3.1 Refleksija vala

Ako se neka točka valnog sredstva giba brzinom $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$, onda na nastavak valnog sredstva djeluje sila F=$Z\cdot\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$, a nastavak (po trećem Newtonovom zakonu) djeluje silom reakcije $-F$ na prethodni dio (budući da smo u kontinuumu, dvije susjedne točke su vrlo bliske, pa je i njihovo ponašanje u vremenu vrlo slično). Ovakav odnos morao bi vrijediti i za zadnju točku valnog sredstva. Međutim, ako je zadnja točka vezana za nesavršen završetak impedancije Z_n, onda bi njeno gibanje brzinom $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ značilo da valno sredstvo djeluje na nesavršeni završetak silom F_n=$Z_n\cdot\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ umjesto sile F. Zbog razlike sila F_n i F javlja se reflektirani val, tj. dio sile F_n služi kao izvor vala koji se vraća od nesavršenog završetka.

Promotrimo cijeli problem analitički. Neka se duž pozitivnog smjera osi z širi *upadni val* opisan s:

$$u_u(z,t) = A_u \sin(\omega t - kz) \quad ,$$

a duž negativnog smjera *reflektirani val* opisan s:

$$u_r(z,t) = A_r \sin(\omega t + kz) \quad .$$

Svaka čestica u valnom sredstvu titra superpozicijom upadnog i reflektiranog vala:

$$u(z,t) = u_u(z,t) + u_r(z,t) \quad .$$

To se odnosi i na zadnju česticu u valnom sredstvu. Neka se ona nalazi na z=0 (sam je odabir ishodišta osi z irelevantan za razmatranje koje provodimo), pa je njeno ukupno gibanje dano s izrazom:

$$u = u_u + u_r = (A_u + A_r)\sin(\omega t) \quad .$$

Zadnja čestica djeluje stoga na nesavršeni završetak silom:

$$F_n = Z_n \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Z_n \omega \left(A_u + A_r\right)\cos(\omega t) \quad .$$

Prema trećem Newtonovom zakonu nesavršeni završetak djeluje silom $-F_n$ na zadnju česticu valnoga sredstva. Dio te sile zapravo je sila reakcije na silu koju "donosi" upadni val - no budući da je završetak nesavršen, te se dvije sile ne kompenziraju u potpunosti. "Višak sile" kojom nesavršeni završetak djeluje na zadnju česticu valnoga sredstva pokreće reflektirani val. Dakle, ukupnu silu $-F_n$ kojom nesavršeni završetak djeluje na zadnju česticu valnoga sredstva možemo zapisati kao silu reakcije na upadni val (tj. silu koja bi se javila da se posve "upija" upadni val) uvećanu za višak koji tada interpretiramo kao silu koja pokreće reflektirani val:

$$-F_n = -Z\frac{\mathrm{d}u_u}{\mathrm{d}t} + Z\frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}t} \quad .$$

Sređivanjem dobivamo:

$$-Z_n\omega\left(A_u + A_r\right)\cos(\omega t) = -Z\omega A_u \cos(\omega t) + Z\omega A_r \cos(\omega t) \quad ,$$

$$-Z_n\left(A_u + A_r\right) = -ZA_u + ZA_r \quad ,$$

$$A_r\left(Z + Z_n\right) = A_u\left(Z - Z_n\right) \quad .$$

Koeficijent refleksije definiramo kao:

$$R = \frac{A_r}{A_u} \quad , \tag{4.16}$$

pa za njega dobivamo:

$$R = \frac{Z - Z_n}{Z + Z_n} \quad . \tag{4.17}$$

Treba naglasiti da ovako definiran koeficijent refleksije po iznosu ne može biti veći od 1 jer bi to narušavalo zakon očuvanja energije (energija titranja je proporcionalna s kvadratom amplitude, pa zaključujemo da reflektirani val mora imati amplitudu manju ili jednaku amplitudi upadnog vala). Nadalje, koeficijent refleksije može biti negativan jer reflektirani val ne mora nužno na granici titrati u istom smjeru kao upadni - zaključujemo da vrijedi: $-1 \leq R \leq 1$. Razmotrimo par posebnih slučajeva relativnih odnosa impedancija Z i Z_n.

1) $Z_n = 0$ - završetka uopće nema; kraj sustava je "**slobodan**". Koeficijent refleksije je tada:

$$R = \frac{Z - Z_n}{Z + Z_n} = \frac{Z}{Z} = 1 \quad .$$

Iz definicije koeficijenta refleksije tada slijedi: $A_r = A_u$. Kod refleksije na slobodnome kraju amplituda reflektiranog vala ima isti iznos i predznak kao amplituda upadnog vala. Gibanje zadnje čestice u valnom sredstvu tada je dano s:

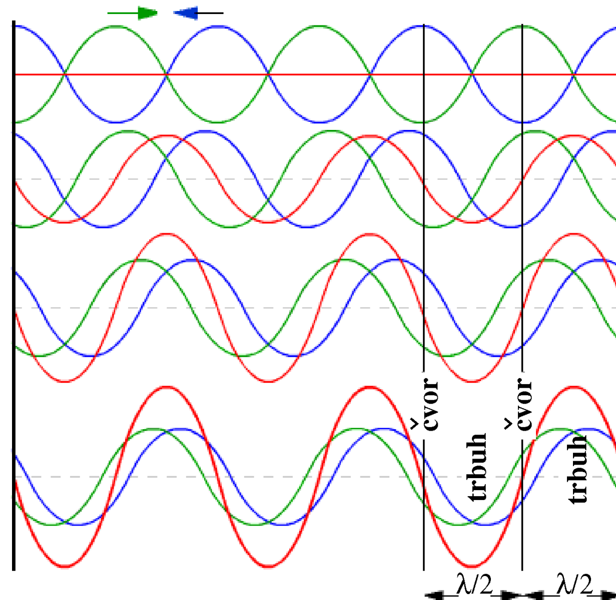
$$u = u_u + u_r = (A_u + A_r) \sin(\omega t) = 2A_u \sin(\omega t) \quad ;$$

tj. ukupna amplituda titranja zadnje čestice jednaka je $2A_u$.

Gibanje čestice na općenitom položaju z valnog sredstva dano je s:

$$u(z,t) = u_u(z,t) + u_r(z,t) = A_u [\sin(\omega t - kz) + \sin(\omega t + kz)] = 2A_u \cos(kz) \sin(\omega t) \quad .$$

Sve čestice titraju istom frekvencijom i u fazi, a amplituda ovisi o položaju z. Čestice za koje vrijedi $\cos(kz) = \pm 1$ titraju amplitudom $2A_u$ (govorimo o "*trbuhu*" vala, *engl.* wave antinode), a one za koje je $\cos(kz) = 0$ uopće ne titraju (govorimo o "*čvoru*" vala, *engl.* wave node). U čvorovima se u_u i u_r uvijek poništavaju, a u trbusima se uvijek zbrajaju.



Slika 4.16: Stojni val (prikazan crveno) kao superpozicija valova (istih amplituda i frekvencija) koji se šire ulijevo (prikazan plavo) i udesno (prikazan zeleno). Odozdo prema dolje prikazana su sva tri vala u četiri bliska trenutka.

Superpozicija dvaju valova *istih frekvencija i amplituda* koji se šire u suprotnim smjerovima u rezultatu je ekvivalentna modovima titranja detaljno diskutiranim u prvom poglavlju, a uobičajeno se naziva **stojni val** - različitim imenima za isto ponašanje samo naglašavamo njihov različit način upogonjavanja.

Nastanak i razvoj stojnog val shematski je prikazan na slici 4.16. Stojni val u ovom primjeru nastaje od dva putujuća vala (istih amplituda i frekvencija), od kojih se jedan (prikazan zeleno) širi udesno, a drugi (prikazan plavom bojom) ulijevo. Najgornji dio slike prikazuje trenutak kada se maksimumi jednog vala poklapaju s minimumima drugog - valovi su tada u antifazi i njihova je

superpozicija jednostavno ravna crta (crvena linija). Nakon nekog kratkog vremenskog intervala Δt (kratkog u usporedbi s periodom T), maksimumi putujućih valova pomaknuli su se ulijevo, odnosno udesno, za iste udaljenosti, kao što je prikazano na drugom dijelu slike 4.16. Točke u kojima su se na prvom dijelu slike nalazili maksimumi i minimumi putujućih valova u sumi ostaju nepromijenjene (jednake nuli) - to su čvorovi stojnog vala. U točkama gdje su putujući valovi u početnom trenutku imali otklone jednake nuli, otkloni svakog od vala sada postaju različiti od nule i istog predznaka - njihova suma počinje rasti po iznosu i raste sve do trenutka kada se u njima ne poklope maksimumi (odnosno minimumi) putujućih valova (kao što je prikazano na donja dva dijela slike 4.16). Te su točke trbusi stojnog vala, odnosno mjesta gdje su amplitude ukupnog titranja čestica sustava maksimalne. Položaj čvorova i trbuha stojnog vala *ne mijenja* se u vremenu - može se reći da oni "stoje" na istoj lokaciji i od tuda ime za ovu vrstu vala (stojni val, *engl.* standing wave). Riječ je o vrlo važnom fenomenu koji će još biti diskutiran u ovom kolegiju, a konceptualno je važan i za druge dijelove fizike (npr. kvantnu fiziku).

2) $Z_n = Z$ - savršen završetak za dano valno sredstvo. Koeficijent refleksije je tada:

$$R = \frac{Z - Z_n}{Z + Z_n} = \frac{0}{2Z} = 0 \quad .$$

Iz definicije koeficijenta refleksije, tada dobivamo A_r=0; dakle, reflektiranog vala nema. Savršen završetak "upija" cjelokupan upadni val.

3) $Z_n = \infty$ - završetak pruža beskonačno velik otpor gibanju zadnje čestice; zadnja čestica je zapravo učvršćena, pa govorimo o kraju sustava koji je "**čvrst**". Koeficijent refleksije je tada:

$$R = \frac{Z - Z_n}{Z + Z_n} \approx \frac{-Z_n}{Z_n} = -1 \quad .$$

Iz definicije koeficijenta refleksije tada slijedi: $A_r = -A_u$. Kod refleksije na čvrstom kraju amplituda reflektiranog vala ima isti iznos, ali suprotan predznak od amplitude upadnog vala.

Gibanje zadnje čestice u valnom sredstvu tada je dano s:

$$u = u_u + u_r = (A_u + A_r)\sin(\omega t) = 0 \quad ;$$

tj. ukupna amplituda titranja zadnje čestice jednaka je nuli, što je u skladu s zaključkom da je kraj sustava učvršćen.

Gibanje čestice na općenitom položaju z valnog sredstva dano je s:

$$u(z,t) = u_u(z,t) + u_r(z,t) = A_u\left[\sin(\omega t - kz) - \sin(\omega t + kz)\right] = -2A_u \sin(kz)\cos(\omega t) \quad .$$

Opet dobivamo stojni val (tj. titranje u modovima).

Dakle, na temelju tri razmatrana posebna slučaja **zaključujemo**: ako se impedancija završetka mijenja između 0 i ∞, vrijedi:

$$-1 \leq R \leq 1 \quad ;$$

u graničnim slučajevima (R=±1) superpozicijom dobivamo stojni val. U općenitom slučaju (kada $R \neq \pm 1$) dobivamo djelomično stojni val - na nekim mjestima imamo maksimalnu amplitudu u iznosu:

$$A_{\max} = |A_u| + |A_r| = |A_u|(1 + |R|) \quad ;$$

na drugim je mjestima amplituda minimalna:

$$A_{\min} = |A_u| - |A_r| = |A_u|(1 - |R|) \quad ,$$

no nije jednaka nuli (nema čvorova). Maksimumi i minimumi se pri tome pomiču. U takvoj se situaciji standardno definira veličina naziva "udio ili omjer stojnog vala", *engl.* standing wave ratio (SWR):

$$SWR = \frac{A_{\max}}{A_{\min}} = \frac{1+|R|}{1-|R|} \quad .$$

4.3.2 Transmisija vala

U prethodnom smo poglavlju proučili kako se putujući val reflektira (odbija) na kraju nekog valnog sredstva - u ovom ćemo poglavlju diskutirati transmisiju (prelazak) vala iz jednog valnog sredstva u drugo. I dalje radimo u aproksimaciji kontinuuma: neka se od izvora u nekoj točki sa $z<0$ do točke $z=0$ nalazi valno sredstvo impedancije Z, a na njega se (prema pozitivnim vrijednostima koordinate z) nastavlja drugo valno sredstvo impedancije Z'. U spojnoj točki drugo valno sredstvo djeluje silom reakcije na prvo sredstvo, kao što bi djelovao i završetak impedancije Z'. Stoga dolazi do refleksije:

$$R = \frac{Z-Z'}{Z+Z'} \quad ,$$

na način analogan objašnjenom u prošlom potpoglavlju. Gibanje "granične" čestice na prijelazu između dva valna sredstva tada je opisano s:

$$u = u_u + u_r = A_u \sin(\omega t) + A_r \sin(\omega t) = A_u(1+R)\sin(\omega t) \quad .$$

Gibanje te čestice igra ulogu izvora za transmitirani val, odnosno val koji nastaje u drugom valnom sredstvu:

$$u_t(z,t) = A_t \sin(\omega t - k'z) \quad .$$

Frekvencija titranja ω u drugom sredstvu mora ostati ista jer ne postoji način da se period titranja skrati ili produži. S druge strane, valni broj je vezan za prostorni oblik titranje i on *ne mora* nužno ostati jednak, pa smo ga označili s k'.

Sve čestice u drugom sredstvu titraju istom amplitudom kao izvor, odnosno "granična" čestica:

$$A_t = A_u(1+R) \quad .$$

Analogno koeficijentu refleksije (izraz 4.16), definiramo **koeficijent transmisije**:

$$T = \frac{A_t}{A_u} = 1 + R \quad . \tag{4.18}$$

Budući da za koeficijent refleksije vrijedi $-1 \leq R \leq 1$, za koeficijent transmisije mora biti:

$$0 \leq T \leq 2 \quad .$$

Za $R=-1$ (refleksija na čvrstom kraju), dobivamo T=0 (nema transmisije). Slučaj R=0 (nema refleksije) ostvaren je kada drugo valno sredstvo ima istu impedanciju kao i prvo (dakle, praktički se nastavlja isto valno sredstvo), pa tada vrijedi T=1. Kada vrijedi $R\approx 1$ (refleksija na gotovo slobodnom kraju, koja se dešava kada drugo sredstvo ima vrlo malenu impedanciju), tada je $T\approx 2$ (amplituda transmitiranog vala praktički je dvostruko veća od amplitude upadnog vala).

Demonstracijski pokus 4.4: refleksija i transmisija valova

Važno uočiti: ponašanje faze pri refleksiji na čvrstom i slobodnom kraju.

4.4 Superpozicija valova i grupna brzina

Pitanje koje si postavljamo u ovom poglavlju je: kolikom se brzinom prenosi energija u valu? Pokazali smo da izvor prvoj čestici predaje usrednjenu snagu:

$$P = Z_a \frac{\omega^2 A^2}{2} \quad ;$$

dakle, unutar perioda T izvor prvoj čestici preda energiju E_T=PT. Ali istodobno prva čestica predaje tu istu energiju drugoj, druga trećoj i tako dalje sve do zadnje čestice i eventualnog savršenog završetka sustava.

Da bi odredili brzinu prijenosa energije, moramo znati je li se u vremenu T energija E_T prenijela od izvora samo do prve čestice ili do neke daljnje čestice ili čak do savršenog završetka. Da to saznamo možemo npr. proučiti što se dešava ako u nekom trenutku izvor prestane emitirati val. Da li (i koliko dugo) zadnja čestica nastavlja predavati energiju savršenom završetku? Isto tako, možemo zamisliti da u nekom trenutku izvor počinje emitirati val (kao u uvodu ovog poglavlja), pa se pitamo kada će savršeni završetak početi primati energiju. Dakle, brzinu prijenosa energije možemo odrediti proučimo li situaciju koja nastane **promjenom amplitude** titranja.

Jednostavan alternativan način da postignemo promjenu amplitude u vremenu smo već obradili - riječ je o udarima (vidi str. 36), tj. o superpoziciji dvaju titranja bliskih frekvencija. Iskoristimo tu već proučenu pojavu za određivanje brzine prijenosa energije. Neka, dakle, izvor vala titra superpozicijom dvaju bliskih frekvencija (amplitude tih titranja neka budu jednake) i neka se nalazi u točki z_0=0; tada za njega vrijedi:

$$u_0 = A\sin(\omega_1 t) + A\sin(\omega_2 t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right)\sin(\overline{\omega} t) \quad ,$$

gdje smo koristili već prije (str. 36) definirane zamjene:

$$\overline{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad ,$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad .$$

Budući da su frekvencije ω_1 i ω_2 bliske, vrijedi $\Delta\omega \ll \overline{\omega}$.

Dobiveni rezultat za u_0 možemo shvatiti kao brzo titranje frekvencijom $\overline{\omega}$, čija je amplituda modulirana i kao funkcija vremena jednaka:

$$2A\cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right) \quad .$$

Dakle, kao što smo i željeli, dobili smo titranje čija se amplituda sporo mijenja na izvoru.

Pogledajmo što se dešava s česticom na položaju z_i. Izvor gore opisanim titranjem emitira dva vala. Frekvenciji ω_1 odgovara valni broj k_1, a frekvenciji ω_2 valni broj k_2 (u skladu s disperzijskom relacijom za dano valno sredstvo). Titranje čestice na položaju z_i tada je dano s:

$$\begin{aligned} u(z_i,t) &= A\sin(\omega_1 t - k_1 z_i) + A\sin(\omega_2 t - k_2 z_i) = \\ &= 2A\cos\left[\frac{(\omega_2 t - k_2 z_i) - (\omega_1 t - k_1 z_i)}{2}\right]\sin\left[\frac{(\omega_1 t - k_1 z_i) + (\omega_2 t - k_2 z_i)}{2}\right] = \\ &= 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2} - \frac{\Delta k z_i}{2}\right)\sin\left(\overline{\omega} t - \overline{k} z_i\right) \quad , \end{aligned}$$

gdje smo srednji valni broj i razliku valnih brojeva definirali na isti način kao i analogne veličine za frekvenciju:

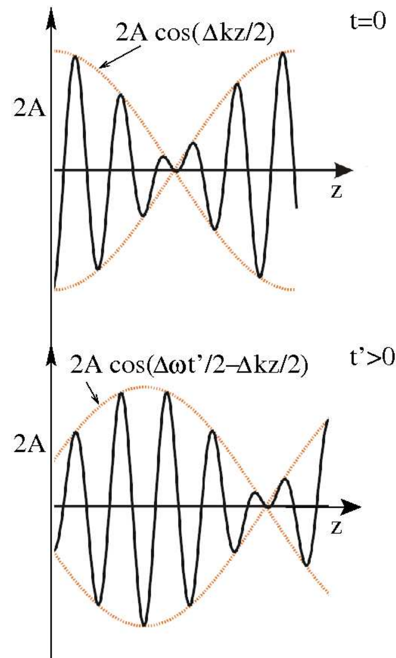
$$\overline{k} = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad ,$$

$$\Delta k = k_2 - k_1 \quad .$$

Dakle, na položaju z_i dobivamo sporu promjenu amplitude titranja danu s:

$$2A \cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2} - \frac{\Delta k z_i}{2}\right) \quad . \tag{4.19}$$

Spora promjena amplitude kasni u fazi za $\Delta k z_i/2$ u odnosu prema sporoj promjeni amplitude na izvoru.



Slika 4.17: Izvor vala koji titra superpozicijom dvaju bliskih frekvencija: pomak maksimalne amplitude u vremenu. Gornja slika daje modulirajuća amplituda (kao funkciju položaja u prostoru z) u trenutku t=0, dok donja daje to isto u kasnijem trenutku t'.

Pogledajmo kojom se brzinom kreće npr. maksimalna vrijednost sporo promjenljive amplitude 4.19. Na slici 4.17 prikazana modulirajuća amplituda u dva trenutka, t=0 (gornja slika) i t'>0 (donja slika). Ucrtane su i "brze oscilacije" za koje je odgovaran srednji valni broj $\overline{k}$, ali one za ovo razmatranje nisu bitne. U trenutku t=0 maksimalna amplituda bila je na lokaciji z=0, jer je tada argument kosinusa u promjenljivoj amplitudu 4.19 jednaki nuli, pa kosinus poprima svoju maksimalnu vrijednost ($\cos 0$=1). U kasnijem trenutku t' maksimum se pomaknuo i nalazi se na nekoj lokaciji z' (slika 4.17 dolje). Lokaciju z' naći ćemo iz zahtjeva da je argument kosinusa i dalje nula (tj. da je amplituda maksimala); tada vrijedi:

$$\frac{\Delta\omega t'}{2} - \frac{\Delta k z'}{2} = 0 \quad ,$$

iz čega slijedi:

$$\frac{z'}{t'} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} \quad .$$

No omjer z'/t' baš predstavlja brzinu premiještanja maksimuma amplitude (za koju vidimo da je konstantna u vremenu); zanima li nas ta brzina na točno određenoj frekvenciji $\overline{\omega}$, Δk moramo učiniti proizvoljno malenim, pa tada gornji omjer postaje derivacija. Možemo **zaključiti** da se cijeli udar koji nastaje superpozicijom dvaju valova bliskih frekvencija širi prostorom upravo gore uvedenom brzinom; ta brzina se stoga naziva **grupnom brzinom** i za nju, dakle, vrijedi:

$$v_g = \lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{\overline{\omega}} \quad . \tag{4.20}$$

Grupnu brzinu, dakle, nalazimo kao koeficijent smjera tangente na disperzijsku krivulju (vidi npr. slike 1.21 i 4.8) u odabranoj točki ($\overline{k}$,$\overline{\omega}$).

Neovisno o tome daje li disperzijska krivulja minimalnu frekvenciju titranja nekog sustava (kao na slici 4.8) ili ne (kao na slici 1.21), za male vrijednosti valnog broja k grupna će brzina biti malena. U istom limesu ($k \to 0$), fazne brzine valova koje superponiramo, ω_1/k_1 i ω_2/k_2, mogu postati vrlo velike, no grupna je brzina ta koja mjeri brzinu prenošenja energije. Iz disperzijskih krivulja danih na slikama 1.21 i 4.8 vidimo da će grupna brzina biti najveća kada je $\overline{k} \approx \pi/(2a)$. Za valne brojeve k koji teže maksimalnoj vrijednosti (π/a), grupna brzina opet postaje malena.

Gore razmatranja napravljena su za diskretne sustave, s proizvoljnim brojem čestica. Razmatramo li **kontinuum**, ograničavamo se na niske vrijednosti valnog broja k (vidi poglavlje 1.4), za koje se disperzijske funkcije može aproksimirati pravcem:

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{\rho}} k \quad .$$

Za faznu i grupnu brzinu tada vrijedi:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad ,$$

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad .$$

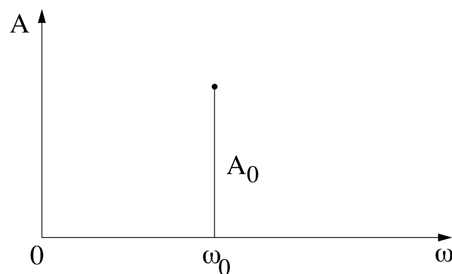
Dakle, za kontinuum vrijedi: $v_g = v_f$; grupna brzina jednaka je faznoj! **Zaključujemo** da brzina prenošenja energije (grupna brzina) u kontinuumu ne ovisi o frekvenciji i valnom broju vala koji energiju prenosi.

4.5 Frekventni spektar

U ovom ćemo potpoglavlju razmatrati samo vremensko titranje izvora vala. Pretpostavimo da je ono, kao i prije, dano s izrazom:

$$u_0(t) = A_0 \sin(\omega_0 t) \quad ;$$

(A_0 i ω_0 su neke točno određene vrijednosti amplitude i frekvencije). Sinusoida kojom predstavljamo ovo titranje kao funkciju vremena je funkcija definirana od $t = -\infty$ do $t = +\infty$. Pogledajmo sada kako izgleda graf koji daje amplitudu ukupnog titranja izvora kao funkciju frekvencije ω - budući da se pretpostavljeno titranje dešava na jednoj jedinoj frekvenciji ω_0, ta će ovisnost biti dana jednom točkom u grafu na slici 4.18 (standardno se ne govori o točki, već o "spektralnoj liniji"). Graf dan na slici 4.18 naziva se *frekventni spektar* gore definiranog titranja. Sasvim općenito, frekventni spektar je graf koji prikazuje Fourierove koeficijente razvoja neke funkcije kao funkciju kutne frekvencije ω. Budući da Fourierov razvoj u najopćenitijem slučaju ima dva seta koeficijenata, A_n i B_n, ponekad



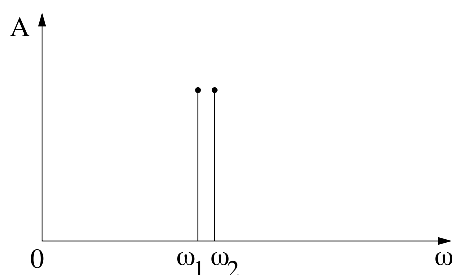
Slika 4.18: Frekventni spektar: amplituda spektralne linije kao funkcija frekvencije ω, za jednostavan harmonijski oscilator.

su potrebna dva grafa za potpuni opis danog razvoja - u primjerima koje ćemo mi diskutirati to neće biti potrebno.

U prethodnom smo potpoglavlju koristili pojavu udara da bi odredili brzinu prenošenja energije valom - udare smo dobili kad je izvor titrao superpozicijom bliskih frekvencija ω_1 i ω_2:

$$u_0 = A_0 \sin(\omega_1 t) + A_0 \sin(\omega_2 t) \quad .$$

Pretpostavimo li da takvo ponašanje traje od $t{=}-\infty$ do $t{=}+\infty$ (važno je da je funkcija periodična na čitavoj domeni), frekventni spektar ovakvog titranja dan je na slici 4.19.



Slika 4.19: Frekventni spektar za udare.

Na isti način mogli bi kreirati razne superpozicije titranja na većem broju frekvencija i s različitim amplitudama - frekventni spektar imao bi tada niz spektralnih linija razne duljine.

U praksi možemo naići na (periodično) vremensko titranje $u_0(t)$ koje ima jako složenu vremensku ovisnost, pa ne znamo unaprijed možemo li ga (i ako možemo, kako) prikazati kao superpoziciju nekog broja sinusoida s određenim frekvencijama i amplitudama. Metoda koja nam daje odgovor na to pitanje naziva se **spektralna ili Fourierova analiza**[3] - u nastavku poglavlja objasnit ćemo kako ona funkcionira, bez strogih formalnih dokaza (koji će biti dani na drugim kolegijima).

Neka je zadana funkcija $F(t)$ koja je periodična u vremenu s periodom T_1, tj. vrijedi:

$$F(t + T_1) = F(t) \quad ,$$

za bilo koji trenutak t. Takvu funkciju može se razviti u **Fourierov red**:

$$F(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega_1 t) \quad , \tag{4.21}$$

[3]Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), francuski matematičar i fizičar, sa značajnim doprinosima pročavanju titranja, prijenosa topline i efekta staklenika.

gdje je:

$$\omega_1 = 2\pi\nu_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

najniža frekvencija titranja, a ω_n=$n\omega_1$ (n= 2, 3, ...) viši harmonici.

Kako naći koeficijente B_0, A_n i B_n u gornjem razvoju (tzv. **Fourierove koeficijente**)? B_0 je lagan - izraz 4.21 jednostavno treba integrirati po t između nekog po volji izabranog t' i t'+T_1. Na desnoj strani preživljava samo prvi član jer je integral sinusa (ili kosinusa) po periodu (ili njegovom višekratniku) uvijek jednak nuli:

$$\int_{t'}^{t'+T_1} \sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t = \int_{t'}^{t'+T_1} \cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad .$$

Da bi našli neki određeni A_m, izraz 4.21 treba prvo pomnožiti sa $\sin(m\omega_1 t)$, te zatim integrirati od t' do t'+T_1; tada na desnoj strani dobivamo članove oblika:

$$A_n \int_{t'}^{t'+T_1} \sin(m\omega_1 t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t \quad ,$$

i:

$$B_n \int_{t'}^{t'+T_1} \sin(m\omega_1 t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t \quad ,$$

(B_0 se integracijom gubi jer ga množi sinus usrednjen po periodu, tj. nula). Kada je n=m, prvi od ova dva integrala dat će nam 1/2 (jer je to, kao što smo više puta pokazali, srednja vrijednost $\sin^2\alpha$ po periodu ili njegovom višekratniku) pomnožen s duljinom intervala T_1. Za sve ostale integrale tvrdimo da su jednaki nuli, što se odmah vidi iz raspisa:

$$\sin(m\omega_1 t)\sin(n\omega_1 t) = \frac{1}{2}\cos[(n-m)\omega_1 t] - \frac{1}{2}\cos[(n+m)\omega_1 t]$$

Budući da su $n-m$ i $n+m$ cijeli brojevi, gornji će nam integrali dati nulu jer su proporcionalni srednjoj vrijednosti kosinusa po višekratniku jednog perioda (isto vrijedi i za sve produkte $\sin(m\omega_1 t)\cdot \cos(n\omega_1 t)$, pa čak i za onaj s n=m). Drugim riječima, pri navedenom postupku na desnoj strani preživljava jedino A_n za koji je n=m, tj. A_m. Analogno se koeficijenti B_n dobivaju množenjem izraza 4.21 sa $\sin(m\omega_1 t)$, te integracijom od t' do t'+T_1.

Opisana procedura pokazuje nam da su **Fourierovi koeficijenti** dani s:

$$B_0 = \frac{1}{T_1}\int_{t'}^{t'+T_1} F(t)\,\mathrm{d}t \quad ,$$

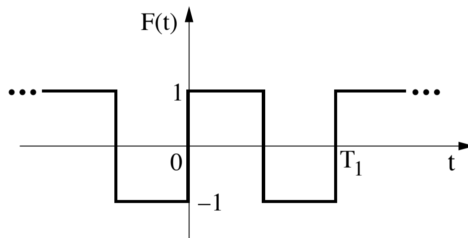
$$B_n = \frac{2}{T_1}\int_{t'}^{t'+T_1} F(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t \quad ,$$

$$A_n = \frac{2}{T_1}\int_{t'}^{t'+T_1} F(t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t \quad ,$$

gdje je t' bilo koji po volji odabrani trenutak u vremenu.

Koeficijent B_0 očito predstavlja srednju vrijednost funkcije $F(t)$. Funkcija $F(t)-B_0$ će stoga biti periodična funkcija sa srednjom vrijednošću jednakom nula - tu ćemo činjenicu često koristiti u praksi.

Pogledajmo na primjeru kako se određuju Fourierovi koeficijenti; uzmimo npr. funkciju pravokutnog oblika prikazanu na slici 4.20 i pokušajmo ju zapisati kao Fourierov red. Ova funkcija je



Slika 4.20: Periodična funkcija pravokutnog oblika.

periodična (s periodom T_1 označenim na slici) na domeni $-\infty<t<\infty$; unutar svakog perioda vrijednost funkcije $F(t)$ jednaka je 1 duž polovice perioda, a -1 duž druge polovice. Uočite da funkcija $F(t)$ nije neprekinuta.

Srednja vrijednost funkcije je očito nula, tj. B_0=0. Funkcija ima neparnu simetriju, tj. vrijedi: $F(-t)$=$-F(t)$. Budući da je kosinus parna funkcija, odmah možemo zaključiti da je B_n=0 za svaki n. Pogledajmo Fourierove koeficijente A_n:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T_1}\int_0^{T_1} F(t)\sin(n\omega_1 t)\mathrm{d}t = \\ &= \frac{2}{T_1}\int_0^{T_1/2}\sin(n\omega_1 t)\mathrm{d}t - \frac{2}{T_1}\int_{T_1/2}^{T_1}\sin(n\omega_1 t)\mathrm{d}t \quad . \end{aligned}$$

Uz supstituciju:

$$\theta = n\omega_1 t \qquad , \qquad \mathrm{d}\theta = n\omega_1 \mathrm{d}t \qquad , \qquad n\omega_1 T_1 = n\frac{2\pi}{T_1}T_1 = 2n\pi \quad ,$$

dobivamo:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T_1}\frac{1}{n\omega_1}\int_0^{n\pi}\sin\theta \mathrm{d}\theta - \frac{2}{T_1}\frac{1}{n\omega_1}\int_{n\pi}^{2n\pi}\sin\theta \mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{1}{n\pi}\left[-\cos\theta\right]\Big|_0^{n\pi} - \frac{1}{n\pi}\left[-\cos\theta\right]\Big|_{n\pi}^{2n\pi} \quad . \end{aligned}$$

Za parne vrijednosti n uvrštavanjem gornjih granica dobivamo isto što dobivamo i uvrštavanjem donjih granica, pa možemo zaključiti da su odgovarajući koeficijenti A_n jednaki nuli. Za neparne n dobivamo:

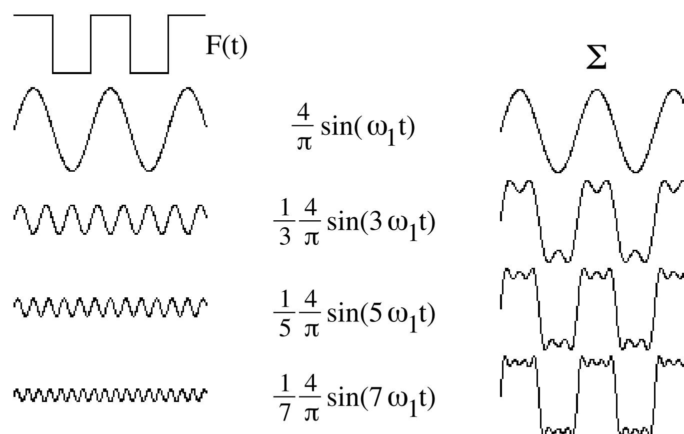
$$A_n = -\frac{1}{n\pi}(-1-1) + \frac{1}{n\pi}(1-(-)1) = \frac{4}{n\pi} \quad .$$

Dakle, Fourierov razvoj u red funkcije sa slike 4.20 izgleda ovako:

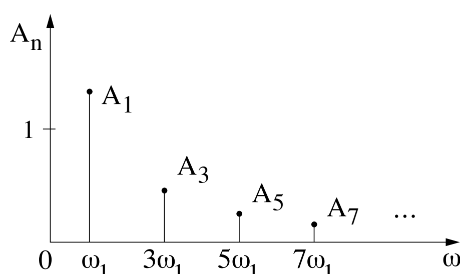
$$F(t) = \frac{4}{\pi}\left[\sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_1 t) + \dots\right] \quad .$$

Na slici 4.21 (lijevo) prikazana su prva četiri člana tog razvoja - svaki sljedeći član reda daje sve manji i manji doprinos ukupnoj sumi. Na desnoj strani iste slike dana je suma svih članova zaključno s članom prikazanim u istom redu lijevo. Svakim dodatnim članom, suma postaje sve sličnija funkciji $F(t)$, danoj na istoj slici gore lijevo. U praksi uzimamo onoliko članova razvoja koji nam daju aproksimaciju s željenom točnošću.

Frekventni spektar za ovaj primjer dan je na slici 4.22. Amplitude titranja postaju sve manje s većom frekvencijom, kao što smo zaključili i prije, no spektar je i dalje "linijski", odnosno diskretan (iako sada sadrži beskonačno točaka). Frekvencija ω_1 naziva se osnovnom frekvencijom ovog



Slika 4.21: Konvergencija Fourierovog reda za periodičnu funkciju pravokutnog oblika (koja je dana gore lijevo na slici).



Slika 4.22: Frekventni spektar Fourierovog reda za periodičnu funkciju pravokutnog oblika.

titranja, dok se ostale frekvencije dobivene u razvoju nazivaju "višim harmonicima".

Pravokutna funkcija koju smo razmatrali je posebna utoliko što ima prekide - između prekida se na mijenja, a u prekidima ima nagle skokove. Općenito, ako neka periodična funkcija $F(t)$ ima brze oscilacije unutar svojeg perioda T_1, onda će Fourierovi koeficijenti višeg reda biti značajniji. Ako se funkcija sporije mijenja, veći su koeficijenti nižeg reda. Pravokutna funkcija je između ta dva ekstrema - zato su koeficijenti nižeg reda dominantni, ali za točan opis skoka potrebni su i oni višeg reda.

Fourierovi razvoji u red za standardne funkcije $F(t)$ mogu se naći u raznim priručnicima (npr. Bronštejnu) ili tablicama na internetu.

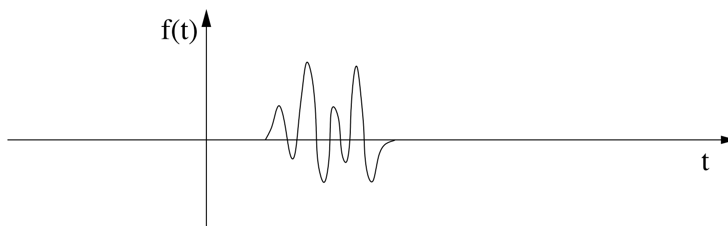
Demonstracijski pokus 4.5: Fourierova analiza zvuka

Važno uočiti: zvuk različitih instrumenata propušta se kroz računalni frekventni analizator i prikazuje kroz frekventni spektar. Broj viših harmonika osnovne frekvencije ovisi o instrumentu.

4.6 Valni paket

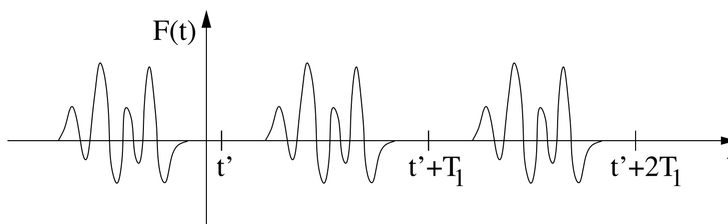
Pojednostavljeno, valni paket je valno gibanje ograničeno na određeni dio prostor (a time i vremena). U ovom potpoglavlju pokazat ćemo da se valni paket može raspisati kao beskonačan skup sinusoidalnih valova različitih valnih brojeva k. Također ćemo pokazati da se valni paket širi kao cjelina, te diskutirati što se pri tome dešava s njegovom širinom. U potpoglavlju zaključili smo da se promjena amplitude valnog titranja širi prostorom *grupnom brzinom* - isto će, dakako, vrijediti i za valni paket.

Razmotrimo neko titranje koje traje samo određeni interval vremena; ponekad se za takvo titranje koristi i termin **puls** ili **signal**. Neka je ono opisano nekom funkcijom $f(t)$ kao na slici 4.23.



Slika 4.23: Valni paket: titranje izvora kao funkcija vremena.

Budući da funkcija $f(t)$ nije beskonačno periodična funkcija, nju se *ne može* jednostavno razviti u Fourierov red. Procedura spektralne analize funkcija poput $f(t)$ teče zbog toga malo drukčije; u prvom ćemo koraku od $f(t)$ konstruirati perodičnu funkciju $F(t)$, ponavljanjem funkcije $f(t)$ u nkeim intervalima duljine T_1 (vidi sliku 4.24), počev od nekog izabranog trenutka t'.



Slika 4.24: Konstrukcija periodične funkcije $F(t)$ od početnog valnog paketa $f(t)$.

Trenutak t' izabran je tako da u njemu funkcija $f(t')$ iščezava. Na isti je način izabran i period T_1 - vrijedi $f(t' + T_1)$=0 (titranje je prestalo). Funkcija $F(t)$ poklapa se s funkcijom $f(t)$ unutar jednog perioda (od trenutka t' do trenutka $t' + T_1$).

Zbog periodičnosti funkcije $F(t)$, možemo ju razviti u Fourierov red postupkom objašnjenim u prethodnom potpoglavlju. U svom frekventnom spektru funkcija $F(t)$ imat će osnovnu (najnižu) frekvenciju jednaku ω_1=$2\pi/T_1$, te više harmonike ω_n=$n\omega_1$. Amplitude pojedinih spektralnih linija dane su Fourierovim koeficijentima.

Zamislimo sada da u sljedećem koraku odaberemo raniji trenutak t' (dakle, t' je pomaknut prema negativnim vrijednostima), a T_1 povećamo toliko da se $t' + T_1$ pomakne prema pozitivnijim vrijednostima vremena. Ponovimo konstrukciju periodične funkcije $F(t)$ od neperiodične $f(t)$ - dobivenu beskonačno periodičnu funkciju $F(t)$ opet možemo razviti u red.

U odnosu na originalan razvoj, smanjit će se osnovna frekvencija ω_1=$2\pi/T_1$ (jer se povećao period T_1), a viši će harmonici biti gušće raspoređeni jer je frekventna razlika susjednih harmonika

jednaka:

$$\omega_{n+1} - \omega_n = (n+1)\omega_1 - n\omega_1 = \omega_1 \quad .$$

Dakako, i za novu funkciju $F(t)$ možemo naći odgovarajuće Fourierove koeficijente.

Postupak možemo ponavljati da bi došli do limesa $t' \to -\infty$, $t' + T_1 \to +\infty$. Funkcije $F(t)$ i $f(t)$ u tom limesu postaju identične. Osnovna frekvencija $\omega_1 = 2\pi/T_1$ postaje infitezimalno malena ($\omega_1 \to \mathrm{d}\omega$), kao i razmak među harmonicima - frekventni spektar više nije linijski, već je kontinuiran ($A_n \to A(\omega)\mathrm{d}\omega$). Umjesto razvoja funkcije $f(t)$ u Fourierov red, u ovom graničnom slučaju dobivamo **Fourierov integral**:

$$f(t) = \int_0^\infty A(\omega)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}\omega + \int_0^\infty B(\omega)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}\omega \quad . \tag{4.22}$$

Budući da vrijedi $\omega_1 T_1 = 2\pi$, iz prijašnjih izraza za Fourierove koeficijente dobivamo nove:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t \quad , \tag{4.23}$$

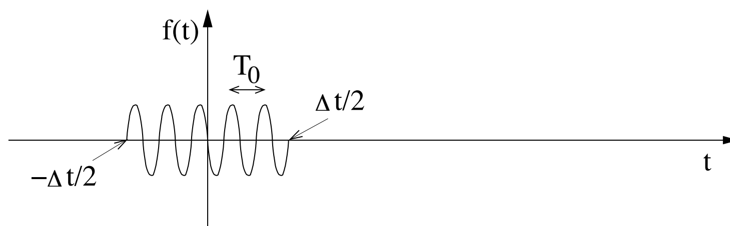
$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t \quad . \tag{4.24}$$

Uočite da koeficijenti $A(\omega)$ i A_n nemaju istu dimenziju (mjernu jedinicu) jer ih veže relacija $A_n \to A(\omega)\mathrm{d}\omega$. Ako funkcija $f(t)$ ima neparnu simetriju, tj. ako vrijedi $f(-t) = -f(t)$, tada će vrijediti $B(\omega) = 0$. Ako je $f(t)$ parna, $f(-t) = f(t)$, tada vrijedi $A(\omega) = 0$ i frekventni spektar sadrži samo $B(\omega)$. U općenitom slučaju, frekventni spektar je prikazan koeficijentima $A(\omega)$ i $B(\omega)$ koji su različiti i tek zajedno daju puno informaciju.

4.6.1 Valni paket: primjer

Gornje ćemo općenito razmatranje valnog paketa detaljnije promotriti na jednom primjeru. Nakon toga ćemo isti primjer iskoristiti za razmatranje veze između trajanja pulsa i širine frekventnog spektra. Iako će dobivena relacija biti "izvedena" na odabranom primjeru[4], taj važan rezultat vrijedit će i općenito, pa ćemo ga diskutirati u sljedećem potpoglavlju.

Neka izvor titranja miruje od $t = -\infty$ do nekog trenutka, a zatim počne sinusoidalnog titrati frekvencijom ω_0, te načini određeni broj (M) punih titraja i zatim stane (M je, dakle, prirodan broj). Budući da imamo slobodu biranja trenutka $t = 0$, izaberimo ga tako da bude točno po sredini intervala između početka i završetka titranja - ovakav je izbor ilustriran na slici 4.25 (na slici je prikazan slučaj s $M = 5$).



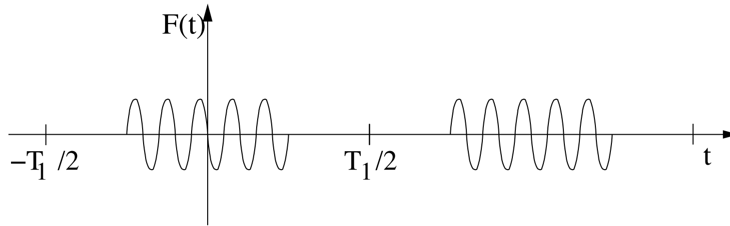
Slika 4.25: Primjer valnog paketa: sinusoidalna funkcija s M punih titraja.

[4]Drukčiji primjer razmatran je u F.S.Crawford Jr.: "Waves", str. 290, no dobiveni zaključci su posve isti kao i u ovdje danom primjeru.

Period jednog titraja je T_0=$2\pi/\omega_0$, tako da se M punih titraja načini u vremenskom intervalu Δt=MT_0. Funkcija $f(t)$ je, dakle, definirana na sljedeći način:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } \; t < -\Delta t/2; \\ A_0 \sin(\omega_0 t) & \text{za } \; -\Delta t/2 \le t \le \Delta t/2; \\ 0 & \text{za } \; t > \Delta t/2. \end{cases}$$

Za primjenu razvoja u Fourierov red konstruiramo beskonačno periodičnu funkciju $F(t)$ ponavljanjem gornje funkcije u nekom periodu T_1 koji je veći od trajanja pulsa Δt. Budući da imamo slobodu izbora perioda T_1, izaberimo ga tako da je on cjelobrojni višekratnik od T_0; dakle, vrijedi: T_1=NT_0, gdje je N cijeli broj veći od M (da bi vrijedilo T_1>Δt). Tako konstruirana funkcija $F(t)$ prikazana je na slici 4.26 (uz odabir N=10).



Slika 4.26: Funkcija $F(t)$ za puls $f(t)$ s prethodne slike.

Srednja vrijednost funkcije $f(t)$, a time i $F(t)$, jednaka je nuli. Nadalje, funkcija $f(t)$ je neparna, pa isto vrijedi i za funkciju $F(t)$. Zbog toga se u Fourierovom razvoju pojavljuju samo sinusne funkcije:

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t) \quad .$$

gdje je ω_1=$2\pi/T_1$.

Fourierovi koeficijenti dani su izrazom:

$$A_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} F(t) \sin(n\omega_1 t) \mathrm{d}t \quad .$$

U intervalu od $-T_1/2$ do $T_1/2$ funkcija $F(t)$ je različita od nule samo za vrijeme trajanja pulsa, tj. od $-\Delta t/2$ do $\Delta t/2$; stoga vrijedi:

$$A_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} A_0 \sin(\omega_0 t) \sin(n\omega_1 t) \mathrm{d}t \quad .$$

Budući da smo odabrali T_1=NT_0, imamo:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{T_1/N} = N\frac{2\pi}{T_1} = N\omega_1 \quad .$$

Dakle, frekvencija ω_0 N-ti je harmonik osnovne frekvencije u Fourierovom razvoju funkcije $F(t)$.

Nadalje, odabrali smo puls koji ima M punih titraja tako da je njegovo trajanje Δt=MT_0, pa za granice integrala dobivamo:

$$\mp\frac{\Delta t}{2} = \mp\frac{MT_0}{2} = \mp\frac{M}{N} \cdot \frac{T_1}{2} \quad .$$

Uvrštavajući u izraz za A_n dobivamo:

$$A_n = \frac{A_0 2}{T_1} \int_{-\frac{M}{N}\cdot\frac{T_1}{2}}^{\frac{M}{N}\cdot\frac{T_1}{2}} \sin{(N\omega_1 t)} \sin{(n\omega_1 t)} \mathrm{d}t \quad .$$

Iskoristimo li trigonometrijsku relaciju:

$$2\sin{(N\omega_1 t)}\sin{(n\omega_1 t)} = \cos{[(N-n)\omega_1 t]} - \cos{[(N+n)\omega_1 t]} \quad ,$$

dobivamo:

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{A_0}{T_1} \int_{-\frac{M}{N}\cdot\frac{T_1}{2}}^{\frac{M}{N}\cdot\frac{T_1}{2}} \cos{[(N-n)\omega_1 t]}\mathrm{d}t - \frac{A_0}{T_1} \int_{-\frac{M}{N}\cdot\frac{T_1}{2}}^{\frac{M}{N}\cdot\frac{T_1}{2}} \cos{[(N+n)\omega_1 t]}\mathrm{d}t = \\
&= \frac{A_0}{T_1}\frac{1}{(N-n)\omega_1} \sin{[(N-n)\omega_1 t]}|_{-\frac{M}{N}\cdot\frac{T_1}{2}}^{\frac{M}{N}\cdot\frac{T_1}{2}} - \frac{A_0}{T_1}\frac{1}{(N+n)\omega_1} \sin{[(N+n)\omega_1 t]}|_{-\frac{M}{N}\cdot\frac{T_1}{2}}^{\frac{M}{N}\cdot\frac{T_1}{2}} = \\
&= \frac{A_0}{T_1}\frac{2\sin{\left[(N-n)\omega_1 \frac{M}{N}\frac{T_1}{2}\right]}}{(N-n)\omega_1} - \frac{A_0}{T_1}\frac{2\sin{\left[(N+n)\omega_1 \frac{M}{N}\frac{T_1}{2}\right]}}{(N+n)\omega_1} = \\
&= \frac{A_0}{\pi}\frac{\sin{[\pi M(N-n)/N]}}{(N-n)} - \frac{A_0}{\pi}\frac{\sin{[\pi M(N+n)/N]}}{(N+n)} \quad .
\end{aligned}$$

Budući da imamo slobodu izbora broja N (omjera T_1/T_0), možemo ga izabrati vrlo velikim (bitno većim nego na slici 4.26 koja je nacrtana uz N=10). Tada je drugi član u dobivenom izrazu za A_n zanemarivo malen (u nazivniku je velik broj, a u brojniku sinus koji maksimalno može biti 1), i ostaje nam samo prvi član.

Prvi član dobivenog izraza za A_n je također malen ako je n jako različit od N. Dakle, značajni će biti samo oni Fourierovi koeficijenti A_n za koje je n blizak broju N. Da nađemo sam A_N iskoristit ćemo tabličan limes:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad ,$$

uz supstituciju:

$$x_n = \frac{\pi M(N-n)}{N} \quad ;$$

izraz za $A_{n\to N}$ postaje:

$$\begin{aligned}
A_N &= \frac{A_0}{\pi}\lim_{n\to N}\frac{\sin{[\pi M(N-n)/N]}}{(N-n)} = \\
&= \frac{A_0}{\pi}\lim_{x_n\to 0}\frac{\sin x_n}{x_n N/(\pi M)} = \\
&= \frac{A_0 M}{N} \quad .
\end{aligned}$$

Najveći Fourierov koeficijent je upravo ovaj koji se odnosi na N-ti harmonik od ω_1, a to znači na frekvenciji $N\omega_1$=ω_0.

Da smo uzeli titranje koje traje beskonačno dugo, tj. da vrijedi $M\to\infty$, tada bi i period ponavljanja trebalo smatrati beskonačno velikim (tj. $N\to\infty$), pa bismo očekivano imali samo jednu Fourierovu komponentu: $A_0\sin{(\omega_0 t)}$. No, za puls s konačnim brojem titraja M, te periodom ponavljanja T_1 koji je duži od trajanja pulsa Δt, imamo $N>M$, odnosno $A_N<A_0$. Zato imamo veći broj Fourierovih koeficijenata koji su različiti od nule.

Pogledajmo kako se mijenjaju Fourierovi koeficijenti udaljevanjem od limesa $n\to N$. Funkcija $\sin x/x$ smanjuje se od jedinice (za $x\approx 0$) do nule koja se postiže kada je x=$\pm\pi$. Dakle, imamo

dvije vrijednosti x za koje će se desiti ovo potonje; njima odgovaraju indeksi n' i n'' Fourierovih koeficijenata:

$$x_{n'} = \frac{\pi M(N-n')}{N} = \pi \qquad \Rightarrow \qquad n' = N - \frac{N}{M} \quad ,$$

$$x_{n''} = \frac{\pi M(N-n'')}{N} = -\pi \qquad \Rightarrow \qquad n'' = N + \frac{N}{M} \quad .$$

Fourierovi koeficijenti za harmonike $n'\omega_1$ i $n''\omega_1$ iščezavaju ($A_{n'} = A_{n''} = 0$).

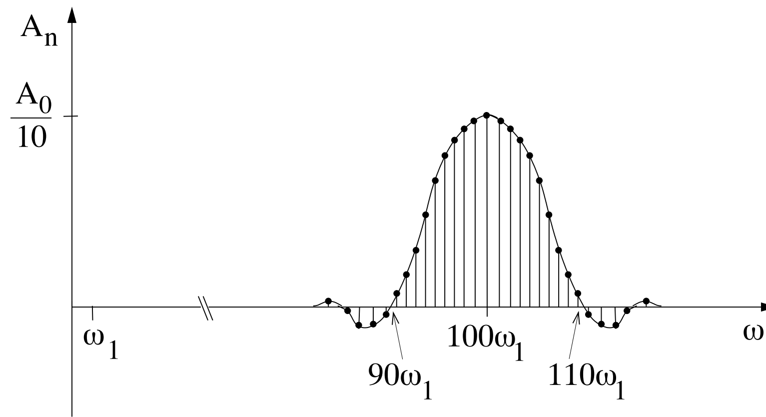
Znajući sve ovo, nacrtajmo sada frekventni spektar za slučaj M=10 (Δt=MT_0, puls traje deset punih titraja), N=100 ("period ponavljanja" T_1 jednak je NT_0). Uz takve vrijednosti za N i M dobivamo:

$$A_N = \frac{A_0 M}{N} = \frac{A_0}{10} \quad ,$$

$$n' = N - \frac{N}{M} = 100 - 10 = 90 \quad ,$$

$$n'' = N + \frac{N}{M} = 100 + 10 = 110 \quad ,$$

pa konačno možemo kvalitativno nacrtati frekventni spektar (dan na slici 4.27).



Slika 4.27: Frekventni spektar za valni paket dan na slici 4.25, uz M=10 i N=100 (tada je ω_0=100ω_1).

Dominantni Fourierovi koeficijenti su oni za harmonike blizu N-tom. Uzmimo kao mjeru za frekventnu širinu polovicu raspona središnjeg maksimuma:

$$\Delta\omega = \frac{1}{2}\left(n''\omega_1 - n'\omega_1\right) \quad .$$

Tada vrijedi:

$$\Delta\omega = \frac{1}{2}\left(n'' - n'\right)\omega_1 = \frac{N}{M}\omega_1 = \frac{N}{M}\frac{2\pi}{T_1} = \frac{N}{M}\frac{2\pi}{NT_0} = \frac{2\pi}{MT_0} = \frac{2\pi}{\Delta t} \quad .$$

4.6.2 Valni paket: veza trajanja pulsa sa širinom frekventnog spektra

Kao konačan rezultat primjera u prošlom potpoglavlju dobili smo:

$$\Delta\omega \cdot \Delta t = 2\pi \quad , \tag{4.25}$$

odnosno:

$$\Delta\nu \cdot \Delta t = 1 \quad .$$

U ovim relacijama više ne figuriraju parametri M i N, razultat je neovisan o njihovim konkretnim vrijednostima i stoga ga možemo smatrati općenitim!

Probajmo dati fizičku interpretaciju dobivene relacije 4.25. Što je vrijeme trajanja pulsa Δt duže, to je širina frekventnog spektra $\Delta\omega$ manja, tj. frekventni spektar je uži. U limesu vremenski neograničenog sinusoidalnog pulsa ($\Delta t \to \infty$), dobili bismo $\Delta\omega \to 0$, tj. titranje samo na jednoj frekvenciji ω_0.

Ako je pak trajanje pulsa Δt kraće, proširuje se frekventni spektar (širina $\Delta\omega$ je veća). U krajnjem slučaju, kada bismo imali samo jedan puni titraj, tj. $\Delta t = T_0$, dobili bismo za širinu spektra $\Delta\omega = 2\pi/T_0 = \omega_0$. Drugim riječima, spektar bi bio širok koliko je i sama vrijednost frekvencije ω_0. Dakle, mnoštvo harmonika $n\omega_1$ koji se nalaze unutar raspona $\Delta\omega = \omega_0$ imali bi značajne vrijednosti Fourierovih koeficijenata.

4.6.3 Valni paket: širenje sredstvom

Neka funkcija $F(t)$ predstavlja titranje izvora:

$$u_0(t) = F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega_n t) \quad .$$

gdje je $\omega_n = n\omega_1$. U valnom će se sredstvu širiti val:

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega_n t - k_n z) \quad ,$$

gdje svakom titranju na frekvenciji ω_n odgovara neki k_n u skladu s disperzijskom relacijom za dano valno sredstvo.

Pogledajmo prvo slučaj kada je disperzijska relacija *linearna*:

$$\omega = vk \quad ;$$

u tom je slučaju fazna brzina jednaka grupnoj brzini ($v = v_f = v_g$) i neovisna o frekvenciji. Valni se paket širi od izvora duž valnog sredstva *bez promjene oblika*.

Ako disperzijska relacija *nije linearna*, pojedini harmonici putuju različitim brzinama, pa očekujemo da valni paket mijenja svoju širinu. Uz upotrebu primjera iz prošlog potpoglavlja pokazat ćemo da se uvijek širi! Naime, ako je izvor napravio M punih titraja frekvencijom ω_0 (što znači da valni paket ima prostornu duljinu $M\lambda_0$), onda vrijedi:

$$(\Delta z)_0 = M\lambda_0 \quad .$$

Međutim, zbog ograničenog trajanja pulsa Δt, dobivamo spektralu širinu $\Delta\omega$, a time i odgovarajući pojas za kutne valne brojeve Δk, u skladu s disperzijskom relacijom za dano valno sredstvo. Grupna je brzina dana relacijom:

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega(k)}{\mathrm{d}k} \quad ;$$

ako je disperzijska relacija nelinearna, onda za različite vrijednosti valnog broja k unutar intervala Δk dobivamo različite vrijednosti grupne brzine v_g. Odgovarajući raspon grupnih brzina jednak je:

$$\Delta v_g = \frac{\mathrm{d}v_g(k)}{\mathrm{d}k}\Delta k = \left(\frac{\mathrm{d}^2\omega(k)}{\mathrm{d}k^2}\right)\Delta k \quad ,$$

gdje derivacije u ovom izrazu računamo na sredini pojasa Δk. Zbog te razlike u grupnim brzinama na krajevima pojasa Δk (odnosno $\Delta\omega$), valni paket koji je u početku (u $t\approx 0$) imao prostornu širinu $(\Delta z)_0$, nakon vremena t imat će prostornu širinu:

$$(\Delta z)_t \approx (\Delta z)_0 + (\Delta v_g)\, t \quad .$$

Širina valnog paketa rast će u vremenu.

Izvest ćemo još jedan važan izraz, od bazičnog značenja za kvantnu mehaniku. Za valni paket koji ima neku spektralnu širinu $\Delta\omega$, približno vrijedi:

$$\Delta k = \left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right) \Delta\omega \quad ,$$

gdje derivacije u ovom izrazu računamo na sredini pojasa Δk. To možemo raspisati kao:

$$\Delta k = \frac{\Delta\omega}{\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}} = \frac{\Delta\omega}{(v_g)_s} \quad ,$$

gdje je s $(v_g)_s$ označena grupna brzina koja odgovara sredini pojasa Δk (i koja ne mora nužno biti jednaka prosječnoj grupnoj brzini). Neka je Δt vremenski interval u kojem valni paket prostorne širine Δz prođe kroz neku odabranu točku z: Ako je taj Δt vrlo malen, možemo napraviti aproksimaciju da se valni paket kao cjelina giba brzinom $(v_g)_s$; tada imamo sljedeću vezu prostorne širine paketa Δz i vremenskog intervala Δt:

$$\Delta z \approx (v_g)_s\, \Delta t \quad .$$

Množenjem gornje dvije jednadžbe i kraćenjem s $(v_g)_s$ dobivamo:

$$\Delta k \Delta z \approx \Delta\omega \Delta t \quad .$$

Za dani valni paket koji je nastao određenim titranjem izvora, $\Delta\omega$ je utvrđena spektralna širina koja se ne mijenja tijekom vremena kako valni paket putuje duž valnog sredstva. Isto vrijedi i za pojas Δk, budući da je on povezan s $\Delta\omega$ preko disperzijske relacije.

S druge strane, u valnom sredstvu s nelinearnom disperzijskom relacijom prostorna se širina valnog paketa Δz povećava u vremenu. Zbog toga se povećava i vremenski interval Δt koji je potreban da valni paket prođe kroz neku točku z. Prije smo pokazali da u vremenu oko početnog trenutka $t=0$ vrijedi:

$$\Delta k\, (\Delta z)_0 \approx \Delta\omega\, (\Delta t)_0 = 2\pi \quad .$$

U kasnijim vremenima t, kada je valni paket već otputovao daleko duž valnog sredstva, imamo njegovo širenje na $(\Delta z)_t$, odnosno produljenje vremenskog intervala $(\Delta t)_t$, tako da vrijedi:

$$\Delta k\, (\Delta z)_t \approx \Delta\omega\, (\Delta t)_t > 2\pi \quad . \tag{4.26}$$

Puni značaj ovog rezultata pokazat će se tek na kolegijima “Opća fizika 4” i “Uvod u kvantnu fiziku”.

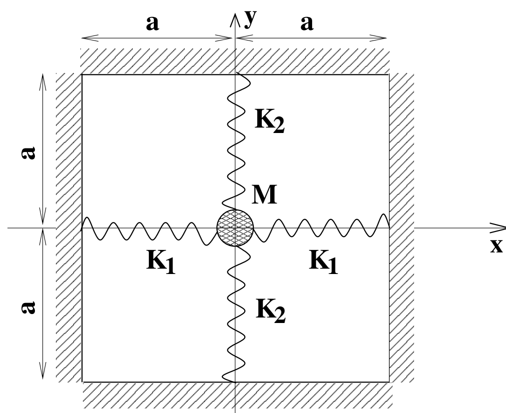
5

Titranja i valovi u više dimenzija

Sva dosadašnja razmatranja napravili smo na sistemima koji se pružali duž jedne dimenzije (pravca). U ovom ćemo poglavlju pogledati koji se novi fenomeni pojavljuju pri širenju razmatranja na dvije i tri dimenzije. Počet ćemo s jednostavnim titranjem jednog tijela u dvije dimenzije, zatim preći na sustave s više tijela i njihove modove titranja, te na kraju proučiti nastanak i širenje valova pod ovakvim općenitijim uvjetima.

5.1 Jednostavan harmonijski oscilator u više dimenzija

Pogledajmo sustav prikazan u ravnoteži na slici 5.1. Masa M vezana je preko četiri opruge na nepomične zidove. Sve četiri opruge imaju istu svojstvenu duljinu a_0, u ravnotežnom položaju duljina im je a, dok su im konstante elastičnosti jednake duž svake od osi (kao na slici). Pretpostavimo da se čitav sistem nalazi na horizontalnoj podlozi uz zanemarivo trenje - time spriječavamo titranje tijela okomito na prikazanu ravninu i proučavamo samo pojave koje se dešavaju u ravnini. Koordinatni sustav postavljen je tako da se osi x i y poklapaju sa smjerovima pružanja opruga u ravnoteži, a ishodište sustava je u ravnotežnom položaju mase m.



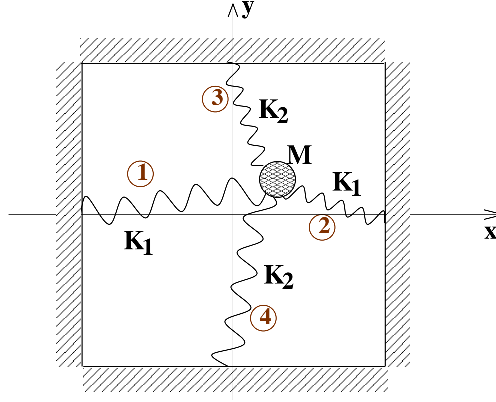
Slika 5.1: Jednostavan harmonijski oscilator u dvije dimenzije: položaj ravnoteže.

Izmaknemo li tijelo iz položaja ravnoteže (kao na slici 5.2), na njega će djelovati 4 elastične povratne sile (kao na slici 5.3). Općenit početni otklon vodit će i na transverzalno i na longitudinalno titranje naspram *svake* opruge - ukupno gibanje ipak nećemo gledati na taj način, nego ćemo jednadžbe gibanja probati zapisati zasebno za x-, zasebno za y-smjer. U izvodu koji slijedi potrebno je rastaviti sve povratne sile na komponente i raspisati ih preko koordinata otklona iz ravnoteže, te karakterističnih veličina opruga (a_0 i a).

Označimo li s a_i duljinu svake od opruga u položaju prikazanom na slici 5.3, tada uz oznake za kutove kao na toj slici, vrijedi:

$$\cos\alpha = \frac{a+x}{a_1}\quad,\quad \cos\beta = \frac{a-x}{a_2}\quad,\quad \cos\gamma = \frac{a-y}{a_3}\quad,\quad \cos\delta = \frac{a+y}{a_4}\quad,$$

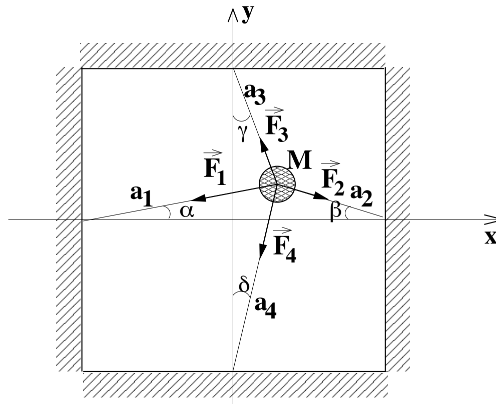
$$\sin\alpha = \frac{y}{a_1}\quad,\quad \sin\beta = \frac{y}{a_2}\quad,\quad \sin\gamma = \frac{x}{a_3}\quad,\quad \sin\delta = \frac{x}{a_4}\quad.$$



Slika 5.2: Jednostavan harmonijski oscilator u dvije dimenzije: općeniti položaj.

Komponenta ukupne sile na tijelo u smjeru osi x dana je s:

$$\begin{aligned}
F_x &= -F_1\cos\alpha + F_2\cos\beta - F_3\sin\gamma - F_4\sin\delta = \\
&= -K_1\left[\left(1-\frac{a_0}{a_1}\right)(a+x) - \left(1-\frac{a_0}{a_2}\right)(a-x)\right] - K_2 x\left(1-\frac{a_0}{a_3}+1-\frac{a_0}{a_4}\right) = \\
&= -K_1\left\{a\cdot a_0\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right) + x\left[2-a_0\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)\right]\right\} - K_2 x\left[2-a_0\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\right)\right] \quad.
\end{aligned}$$



Slika 5.3: Jednostavan harmonijski oscilator u dvije dimenzije: raspis sila.

Upotrebom Pitagorinog poučka nalazimo:

$$a_{1,2} = \sqrt{(a\pm x)^2 + y^2} = a\sqrt{1\pm\frac{2x}{a}+\frac{x^2+y^2}{a^2}}\quad,$$

$$\frac{1}{a_{1,2}} = \frac{1}{a\left(1\pm\frac{2x}{a}+\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{1/2}} \approx \frac{1}{a}\left(1\mp\frac{x}{a}-\frac{x^2+y^2}{2a^2}\right)\quad,$$

$$a_{3,4} = \sqrt{(a \mp y)^2 + x^2} = a\sqrt{1 \mp \frac{2y}{a} + \frac{x^2+y^2}{a^2}} \quad ,$$

$$\frac{1}{a_{3,4}} = \frac{1}{a\left(1 \mp \frac{2y}{a} + \frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{1/2}} \approx \frac{1}{a}\left(1 \pm \frac{y}{a} - \frac{x^2+y^2}{2a^2}\right) \quad .$$

Sada nalazimo:

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{x}{a} - \frac{x^2+y^2}{2a^2} - 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2+y^2}{2a^2}\right) = \frac{2x}{a^2} \quad ,$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{x^2+y^2}{2a^2} + 1 + \frac{x}{a} - \frac{x^2+y^2}{2a^2}\right) = \frac{1}{a}\left(2 - \frac{x^2+y^2}{a^2}\right) \quad ,$$

$$\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{y}{a} - \frac{x^2+y^2}{2a^2} + 1 - \frac{y}{a} - \frac{x^2+y^2}{2a^2}\right) = \frac{1}{a}\left(2 - \frac{x^2+y^2}{a^2}\right) \quad .$$

Uvrštavanjem u izraz za x-komponentu ukupne sile, konačno dobivamo:

$$\begin{aligned} F_x &= -K_1\left\{a \cdot a_0\frac{2x}{a^2} + x\left[2 - \frac{a_0}{a}\left(2 - \frac{x^2+y^2}{a^2}\right)\right]\right\} - K_2 x\left[2 - \frac{a_0}{a}\left(2 - \frac{x^2+y^2}{a^2}\right)\right] = \\ &= -K_1\left(2x + x\frac{a_0}{a}\cdot\frac{x^2+y^2}{a^2}\right) - K_2 x\left[2 - \frac{a_0}{a}\left(2 - \frac{x^2+y^2}{a^2}\right)\right] \quad . \end{aligned}$$

Dobiven izraz nije linearan, već sadrži i članove 3. reda - oni nestaju i u čvrstoj aproksimaciji i u aproksimaciji malih oscilacija (vidi str. 12); u potonjoj npr. dobivamo:

$$F_x = M\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \approx -2\left[K_1 + K_2\left(1 - \frac{a_0}{a}\right)\right]x \quad . \tag{5.1}$$

Budući da postoji simetrija na zamjenu x- i y-smjera, (treba samo istovremeno zamijeniti K_1 i K_2), odmah možemo zapisati i jednadžbu gibanja mase m u y-smjeru:

$$M\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -2\left[K_1\left(1 - \frac{a_0}{a}\right) + K_2\right]y \quad .$$

U dobivenim diferencijalnim jednadžbama varijable x i y su posve odvojene - svaku od jednadžbi možemo riješiti zasebno.

Ukupno gibanje mase dobiva se kao superpozicija titranja u smjeru osi x frekvencijom ω_x i titranja u smjeru osi y frekvencijom ω_y:

$$x = A_x\cos(\omega_x t + \phi_x) \quad ,$$

$$y = A_y\cos(\omega_y t + \phi_y) \quad ,$$

gdje su frekvencije ω_x i ω_y dane s:

$$\omega_x = \sqrt{\frac{2\left[K_1 + K_2\left(1 - \frac{a_0}{a}\right)\right]}{M}} \quad , \tag{5.2}$$

$$\omega_y = \sqrt{\frac{2\left[K_1\left(1 - \frac{a_0}{a}\right) + K_2\right]}{M}} \quad . \tag{5.3}$$

Amplitude A_x i A_y, kao i faze ϕ_x i ϕ_y određujemo iz rubnih uvjeta. U dobivenim izrazima prepoznajemo karakteristične doprinose longitudinalnih i transverzalnih komponenti u aproksimaciji

malenih oscilacija (vidi str. 12).

Da sistem nismo stavili na horizontalnu podlogu titranje bi se moglo dešavati i u trećem smjeru (z), s tim da bi izraz za frekvenciju bio nešto drukčiji:

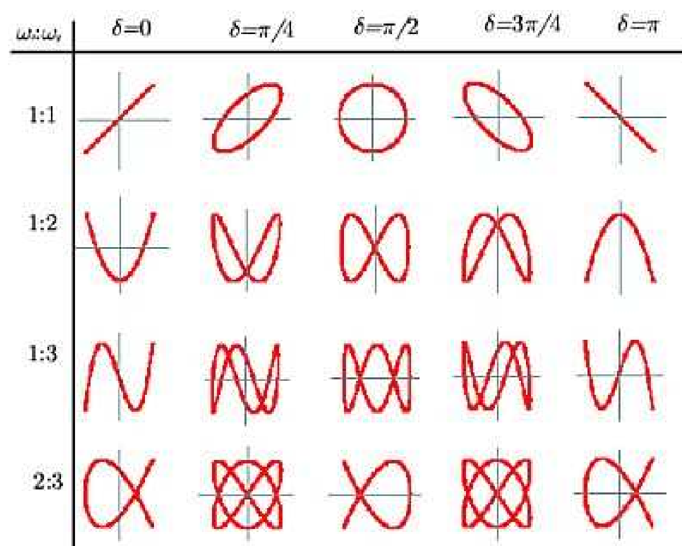
$$\omega_z = \sqrt{\frac{2(K_1 + K_2)\,(1 - \frac{a_0}{a})}{M}} \quad . \tag{5.4}$$

Istovremena titranja u tri okomita smjera prodiskutirati ćemo detaljnije za sustave s više tijela.

5.1.1 Lissajouseve krivulje

U gornjem smo primjeru proučili sustav koji titra u dva međusobno okomita smjera; takvo gibanje rezultat je povratnih linearnih sila i pojavit će se općenito u dvodimenzionalnim situacijama (dobili bi ga npr. i za matematičko njihalo kojem damo komponentu početne brzine okomitu na otklon iz položaja ravnoteže).

Konkretna krivulja po kojoj će se kretati tijelo ovisi o početnim uvjetima (tj. početnim otklonima i brzinama u svakom smjeru), te o omjeru frekvencija titranja ω_x i ω_y. U principu je moguće dobiti vrlo raznolike geometrijske likove: od pravca, kružnice i elipse, do vrlo kompliciranih neperiodičkih (tj. nezatvorenih) krivulja. Sve takve krivulje koje se mogu dobiti kombiniranjem titranja u dva okomita smjera nazivaju se Lissajousevim[1]; nekoliko primjera istih dano je na slici 5.4.



Slika 5.4: Lissajouseve krivulje za $x{=}A\cos(\omega_x t + \delta)$ i $y{=}A\cos(\omega_y t)$ u ovisnosti o omjeru frekvencija ω_x/ω_y (omjeri lijevo) i relativnoj fazi titranja δ (dana gore).

Pravac se npr. dobije kada se titranje u x- i y-smjeru dešava s istom amplitudom i frekvencijom (gornji red slike 5.4), te bez pomaka u fazi. Pod istim uvjetima, ali s pomakom u fazi jednakim $\pi/2$ (x u ekstremu, kada je y nula i obrnuto), dobivamo gibanje tijela po kružnici; ostali pomaci u fazi uz jednake frekvencije vode na elipsu kao Lissajousevu krivulju. U slučaju nejednakih frekvencija ω_x i ω_y, (svi redovi slike 5.4 osim najgornjeg), Lissajouseve krivulje postaju bitno kompliciranije.

[1] Jules Antoine Lissajous, francuski matematičar, 1857.

Svi primjeri sa slike 5.4 imaju racionalan omjer frekvencija; ako je isti iracionalan, bilo koji dio dobivene krivulje u općenitom se slučaju nikada neće ponoviti u vremenu. Lissajouseve krivulje najljepše se demonstriraju u električnim sustavima i uz pomoć osciloskopa; mi ćemo ih stoga pokazati pokusom u okviru sedmog poglavlja.

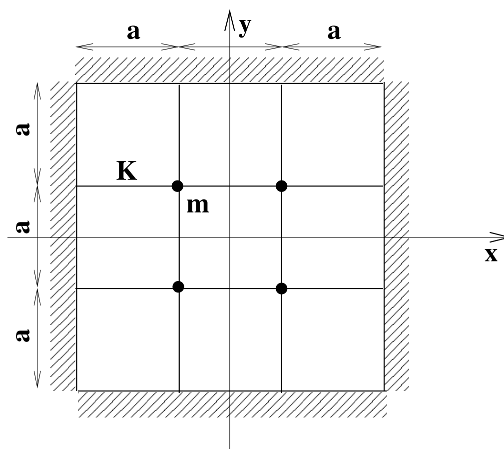
Demonstracijski pokus 5.1: Lissajouseve krivulje

Važno uočiti: svjetlost lasera reflektira se preko dva ogledala vezana na glazbene viljuške koje titraju u međusobno okomitim smjerovima; ovisno o omjeru vlastitih frekvencija viljuška, na zastoru (zidu) iscrtavaju se razne krivulje sa slike 5.4.

5.2 Načini titranja (modovi) u dvije i tri dimenzije

5.2.1 Najjednostavniji dvodimenzionalan sistem

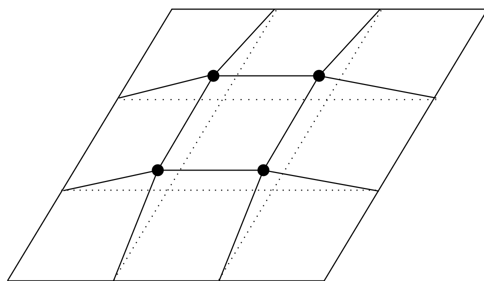
Najjednostavnija dvodimenzionalna struktura s više od jednog tijela dana je na slici 5.5. Četiri tijela složena su u mrežu s dva retka i dva stupca, te s ukupno 12 opruga (ili elastičnih niti) spojena međusobno ili na fiksiran okvir (opruge su u skladu s ranijim dogovorom prikazane običnim linijama). Radi jednostavnosti pretpostavit ćemo da su sve opruge jednake (konstante elastičnosti K), te da su sva tijela jednaka (mase m). Postavimo li koordinatni sustav kao na slici 5.5, tada za ukupnu duljinu sustava i u x- i u y-smjeru imamo L_x=L_y=$3a$.



Slika 5.5: Najjednostavnija dvodimenzionalna strutkura s više (4) čestica spojenih oprugama (njih 12).

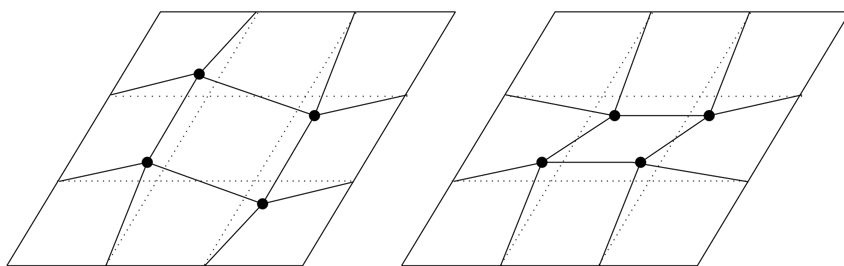
Pogledajmo prvo *transverzalne modove* titranja u kojim čestice titraju okomito na xy-ravninu. Sistem sa slike 5.5 crtamo sada u kosoj projekciji da bi mogli predočiti transverzalne pomake. Kao i kod jednodimenzionalnih sustava, frekvencija moda bit će to niža, što je prosječna povratna sila na pojedinu česticu manja. Modove titranja ćemo, kao i prije, poredati od najmanjih k najvišim frekvencijama. Ukupno očekujemo četiri moda titranja jer sistem sadrži četiri čestice.

U analogiji s jednodimenzionalnim sustavom, kao najniži mod transverzalnog titranja očekujemo titranje kod kojeg su otkloni od ravnoteže svih čestica u jednakom smjeru - sve četiri čestice su u nekom času s iste strane xy-ravnine. Za 2×2 mrežu čestica ti će otkloni (za sistem jednakih masa



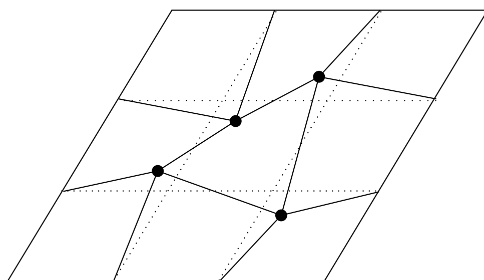
Slika 5.6: Najniži mod titranja mreže sa 2×2 čestica.

i opruga koji razmatramo) čak biti jednakih iznosa (za veći broj čestica to neće biti slučaj). Takav najniži mod titranja dan je na slici 5.6. Prostorni oblik moda je dan s pola sinusoide (dakle, pola valne duljine) i duž osi x i duž osi y.



Slika 5.7: Srednji modovi titranja mreže sa 2×2 čestica.

Pogledajmo zatim viši mod titranja. Kod njega će se u jednom od dva smjera (x i y) između krajeva sistema pružati kao i prije polovica valne duljine prostornog oblika, dok ćemo u drugom smjeru imati oblik koji odgovara pobuđenom modu - dakle, čitavu valnu duljinu. Dvije čestice su u svakom trenutku s jedne strane xy-ravnine, a druge dvije s druge strane. Zbog dva nezavisna smjera, imat ćemo dva ovakva "srednja moda", oba su dana na slici 5.7.



Slika 5.8: Najviši mod titranja mreže sa 2×2 čestica.

I na kraju, kod najvišeg moda titranja između rubova sistema i u x- i u y-smjeru imamo cijelu valnu duljinu, kao na slici 5.8. I ovdje su u svakom trenutku dvije čestice s jedne strane xy-ravnine, a druge dvije s druge strane; no sila na danu česticu je veća jer su u odnosu na nju obje čestice s kojima je povezana u "protufazi", pa su i obje odgovarajuće opruge rastegnute bitno jače nego u nižim modovima.

5.2.2 Dvodimenzionalan sustav s $N \times P$ tijela povezanih s oprugama

Pogledajmo sada općenitiji sustav, kod kojeg ima P redaka i N stupaca čestica poredanih u dvodimenzionalnu mrežu analognu onoj sa slike 5.5. Duž osi x i y imat ćemo modove titranja jednodimenzionalnog sustava; prostorni oblik tih modova bit će dan s:

$$x - \text{smjer}: \quad \sin\left(k_x^{(n)} x\right) \quad ,$$

$$y - \text{smjer}: \quad \sin\left(k_y^{(p)} y\right) \quad ,$$

gdje su valni brojevi k_x i k_y dani s:

$$k_x^{(n)} L_x = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots N) \quad ,$$

$$k_y^{(p)} L_y = p\pi \quad (p = 1, 2, \dots P) \quad .$$

Svaki dvodimenzionalan mod n određen je s dva valna broja, $k_x^{(n)}$ i $k_y^{(n)}$ - zato dvodimenzionalne modove označavamo s dva indeksa: (np). Ukupno, dakako, imamo $N \times P$ modova - kao i u jednodimenzionalnom slučaju, ukupan broj modova jednak je broju čestica jer je upravo to dimenzija sustava diferencijalnih jednadžbi koji dobivamo zapisujući drugi Newtonov zakon za svaku česticu zasebno.

Označimo koordinate ravnotežnog položaja svake od $N \times P$ čestica s x_i i y_j; budući da su razmaci među česticama isti i u x- i u y-smjeru, vrijedi:

$$x_i = ia \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad ,$$

$$y_j = ja \quad (j = 1, 2, \dots, P) \quad .$$

S $u_{ij}^{(np)}$ označit ćemo otklon čestice na lokaciji (x_i,y_j) iz ravnotežnog položaja u modu titranja (np). U danom modu sve čestice titraju istom frekvencijom $\omega^{(np)}$ i imaju istu fazu, no amplitude titranja su općenito različite:

$$u_{ij}^{(np)}(t) = A_{ij}^{(np)} \cos\left(\omega^{(np)} t\right) \quad . \tag{5.5}$$

Amplitude pojedinih čestica možemo u danom modu titranja (np) zapisati preko amplitude samog moda $A^{(np)}$:

$$A_{ij}^{(np)} = A^{(np)} \sin\left(k_x^{(n)} x_i\right) \sin\left(k_y^{(p)} y_j\right) \quad .$$

Ovakav zapis možemo razmotriti na primjeru iz prošlog potpoglavlja, s N=P=2. U tom primjeru imamo ukupno 4 moda titranja - izaberimo npr. mod (np)=(21). Tada vrijedi:

$$A_{ij}^{(21)} = A^{(21)} \sin\left(k_x^{(2)} x_i\right) \sin\left(k_y^{(1)} y_j\right) \quad .$$

Za gore odabran mod, valni brojevi su dani s:

$$k_x^{(2)} L_x = 2\pi \quad \Rightarrow \quad k_x^{(2)} = \frac{2\pi}{L_x} = \frac{2\pi}{3a} \quad ,$$

$$k_y^{(1)} L_y = \pi \quad \Rightarrow \quad k_y^{(1)} = \frac{\pi}{L_y} = \frac{\pi}{3a} \quad .$$

Uvrštavanjem u prethodni izraz dobivamo:

$$A_{ij}^{(21)} = A^{(21)} \sin\left(\frac{2\pi}{3a} x_i\right) \sin\left(\frac{\pi}{3a} y_j\right) \quad .$$

Dakle, za pojedine čestice vrijedi:

$$i=1, j=1 \quad \rightarrow \quad A_{11}^{(21)} = A^{(21)} \sin\left(\frac{2\pi}{3a}a\right) \sin\left(\frac{\pi}{3a}a\right) = \frac{3}{4}A^{(21)} \quad ,$$

$$i=1, j=2 \quad \rightarrow \quad A_{12}^{(21)} = A^{(21)} \sin\left(\frac{2\pi}{3a}a\right) \sin\left(\frac{\pi}{3a}2a\right) = \frac{3}{4}A^{(21)} \quad ,$$

$$i=2, j=1 \quad \rightarrow \quad A_{21}^{(21)} = A^{(21)} \sin\left(\frac{2\pi}{3a}2a\right) \sin\left(\frac{\pi}{3a}a\right) = -\frac{3}{4}A^{(21)} \quad ,$$

$$i=2, j=2 \quad \rightarrow \quad A_{22}^{(21)} = A^{(21)} \sin\left(\frac{2\pi}{3a}2a\right) \sin\left(\frac{\pi}{3a}2a\right) = -\frac{3}{4}A^{(21)} \quad .$$

Kako izgleda disperzijska relacija za općenit dvodimenzionalan slučaj? Ukupna povratna sila na neku česticu jednaka je zbroju sila što ih daju dvije opruge vezane na susjednu čestice duž osi x i dvije opruge vezane na susjednu čestice duž osi y. Uvrštavanjem u jednadžbu gibanja, te uz identičnu proceduru raspisivanja kao za jednodimenzionalan slučaj, dobivamo:

$$\omega^{(np)} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sqrt{\sin^2\left(\frac{k_x^{(n)}a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_y^{(p)}a}{2}\right)} \quad . \tag{5.6}$$

Doprinosi različitih smjerova zbrajaju se u jednadžbi gibanja (u kojoj se pojavljuje kvadrat frekvencije titranja); vađenjem korijena dobivamo gornji izraz. Ova relacija disperzije povezuje frekvenciju danog moda $\omega^{(np)}$ s dva valna broja $k_x^{(n)}$ i $k_y^{(p)}$, koji se određuju kao u jednodimenzionalnom slučaju:

$$k_x^{(n)} L_x = n\pi \quad \Rightarrow \quad k_x^{(n)} = \frac{n\pi}{L_x} = \frac{n}{N+1} \cdot \frac{\pi}{a} \quad ,$$

$$k_y^{(p)} L_y = p\pi \quad \Rightarrow \quad k_y^{(p)} = \frac{p\pi}{L_y} = \frac{p}{P+1} \cdot \frac{\pi}{a} \quad .$$

Primijenimo li ovaj općeniti rezultat na primjer koji smo razmatrali ranije, sa 2×2 čestice (N=P=2), dobivamo:

$$\begin{aligned}
\omega^{(11)} &= \sqrt{\frac{4K}{m}} \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi/(3a)\cdot a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi/(3a)\cdot a}{2}\right)} = \\
&= \sqrt{\frac{4K}{m}} \sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{4K}{m}} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega^{(21)} &= \omega^{(12)} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sqrt{\sin^2\left(\frac{2\pi/(3a)\cdot a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi/(3a)\cdot a}{2}\right)} = \\
&= \sqrt{\frac{4K}{m}} \sqrt{(\sqrt{3}/2)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega^{(22)} &= \sqrt{\frac{4K}{m}} \sqrt{\sin^2\left(\frac{2\pi/(3a)\cdot a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi/(3a)\cdot a}{2}\right)} = \\
&= \sqrt{\frac{4K}{m}} \sqrt{(\sqrt{3}/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{4K}{m}} \quad .
\end{aligned}$$

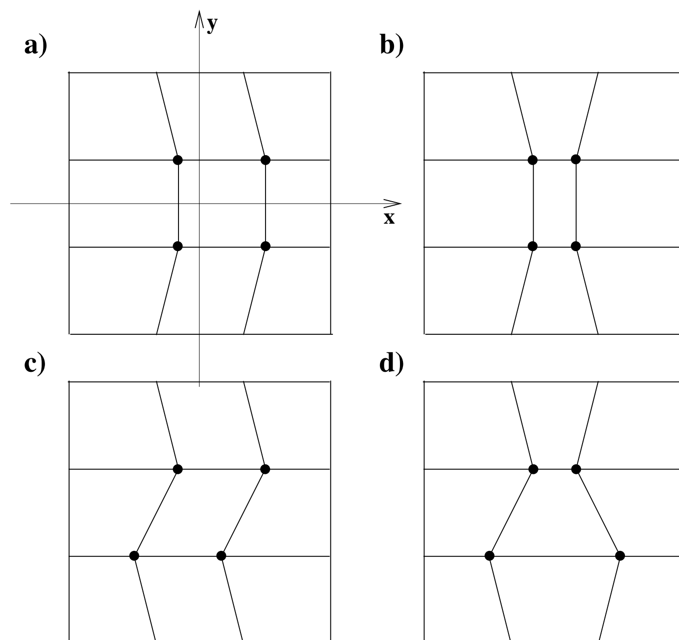
Kao što smo zaključili i u prethodnom potpoglavlju, dva srednja moda, (21) i (12), su ekvivalentna i imaju jednake vlastite frekvencije.

Ako dva ili više modova titranja imaju jednake vlastite frekvencije za njih se obično kaže da su **degenerirani**. To je pomalo nesretan termin (koji pogrešno asocira na nekakvu izobličenost modova), no stvar je jednostavno u tome da se općenito za vlastite frekvencije očekuju međusobno različite vrijednosti, pa je slučaj kad se to ne desi izuzetak, odnosno "degeneracija" (na latinskom riječ "degenerare" znači "odstupati od vlastitog podrijetla").

5.2.3 Polarizacija titranja

Za razliku od jednostavnog jednodimenzionalnog slučaja, u sustavu s više dimenzija smjer titranja i smjer prostiranja sustava nemaju jednostavan odnos. Npr. titranje jednostavnog harmonijskog oscilatora (samo jedno tijelo) obrađeno u poglavlju 5.1 odigravalo se u xy-ravnini u kojoj se i prostirao sustav. Titranje koje se u takvom sustavu odigrava duž osi x longitudinalno je u odnosu na tu os, a transverzalno u odnosu na os y. Posve općenito titranje u toj ravnini imat će i longitudinalnu i transverzalnu komponentu u odnosu na svaku od osi x i y. Za razliku od toga, titranje obrađeno u mreži s 2×2 tijela (poglavlje 5.2.1) primjer je isključivo transverzalnog titranja u odnosu na oba smjera prostiranja mreže.

Smjer titranja tijela općenito se naziva **polarizacijom**[2] titranja. Na primjer, za titranje obrađeno u poglavlju 5.2.1 kažemo da je polarizirano u z-smjeru. Pogledajmo isti taj sustav, dvodimenzionalnu mrežu sa 2×2 tijela, uz polarizaciju u x-smjeru. Modovi titranja za taj su slučaj prikazani na slici 5.9.



Slika 5.9: Modovi titranja polariziranog u x-smjeru za mrežu sa 2×2 tijela: a) najniži mod; b) i c) srednji modovi; d) najviši mod.

Važno je naglasiti da prostorni oblik modova, funkcije $\sin\left(k_x^{(n)}x\right)$ i $\sin\left(k_y^{(n)}y\right)$, ostaju iste za svaku polarizaciju titranja. Ove funkcije opisuju iznose lokalnih amplituda titranja, neovisno o tome je li ono longitudinalno ili transverzalno u odnosu na dani smjer. Za dovoljno istegnute opruge (čvrsta ili "slinky"-aproksimacija), povratna je elastična sila jednaka kod longitudinalnog i

[2]Isti izraz (polarizacija) koristili smo na "Općoj fizici 2" za posve drugačiju pojavu, svojstvo dielektrika da se njegove molekule usmjeravaju u električnome polju, te da on kao cjelina dobiva električni dipolni moment.

transverzalnog titranja (vidi str. 12 ili izraze 5.2, 5.3 i 5.4). U takvim uvjetima frekvencija dvodimenzionalnih modova *ne ovisi* o polarizaciji titranja - takvo ćemo ponašanje podrazumijevati u nastavku poglavlja.

5.2.4 Titranje trodimenzionalnih struktura

Pogledajmo sustav koji se sastoji od čestica poredanih u pravilnu trodimenzionalnu mrežu najjednostavnije geometrije, kao npr. kod nekih kristala. Neka takva mreža sadrži $N \times P \times S$ čestica povezanih oprugama (jednake ravnotežne duljine a); koordinate ravnotežnog položaja neke čestice s indeksima položaja i, j i l bit će dane s:

$$x_i = ia \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \quad ,$$

$$y_j = ja \quad (j = 1, 2, \ldots, P) \quad ,$$

$$z_l = la \quad (l = 1, 2, \ldots, P) \quad ,$$

S $u_{ijl}^{(nps)}$ označit ćemo otklon čestice na lokaciji (x_i,y_j,z_l) iz ravnotežnog položaja u modu titranja (nps); vrijedi:

$$u_{ijl}^{(nps)}(t) = A_{ijl}^{(nps)} \cos\left(\omega^{(nps)} t\right) \quad . \tag{5.7}$$

Kao i u jednodimenzionalnom i dvodimenzionalnom slučaju, u danom modu sve čestice titraju istom frekvencijom $\omega^{(nps)}$ i imaju istu fazu, no amplitude titranja su im općenito različite i mogu se zapisati preko amplitude samog moda $A^{(nps)}$ na sljedeći način:

$$A_{ijl}^{(nps)} = A^{(nps)} \sin\left(k_x^{(n)} x_i\right) \sin\left(k_y^{(p)} y_j\right) \sin\left(k_z^{(s)} z_l\right) \quad .$$

Izraz za frekvenciju titranja moda lako dobivamo poopćavanjem izraza za dvodimenzionalan slučaj (5.6):

$$\omega^{(nps)} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sqrt{\sin^2\left(\frac{k_x^{(n)} a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_y^{(p)} a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_z^{(s)} a}{2}\right)} \quad .$$

Kao što je već spomenuto, ovakav trodimenzionalan sustav može nam poslužiti npr. za opis kristala: čestice u sistemu su tada atomi (ili ioni ili čak molekule), a silu među atomima aproksimiramo elastičnim oprugama (drugim riječima, u razvoju u red stvarnog oblika sile po udaljenosti, ograničavamo se na prvi, linearan član). Za niže modove titranja (tj. dulje valne duljine prostornog oblika moda), prelazimo u aproksimaciju kontinuuma, kao i u sustavima nižih dimenzija. Karakteristični modovi titranja makroskopskog tijela opisanog na ovakav način bit će, između ostalog, određeni i veličinom tijela.

U prethodnim su primjerima obrađene samo najjednostavnije geometrije dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih tijela (kvadratna, odnosno, kubična mreža čestica); odgovarajući oblik moda bio je sinusoidalan. Kod tijela **nepravilnog oblika** modovi mogu izgledati sasvim različito - no bez obzira na to kakav je oblik moda, uvijek će postojati mjesta na kojima čestice neće uopće titrati (čvorovi) i mjesta gdje će titrati velikim (maksimalnim) amplitudama (trbusi). Kod nepravilnih tijela amplitude titranja u nekom modu ne moraju biti jednake u svim trbusima.

Dakako, sam položaj čvorova i trbuha, uz geometriju tijela, ovisi i o rubnim uvjetima. Ako je promatrano tijelo učvršćeno na nekim mjestima za drugo (masivnije) tijelo, onda se u točkama dodira nalaze čvrsti krajevi (odnosno čvorovi) - položaj ostalih čvorova nalazi se rješavanjem jednadžbe gibanje uz odgovarajuće rubne uvjete.

5.2.5 Pobuđivanje modova u dvije i tri dimenzije

Pobuđivanje modova u dvije i tri dimenzije realizira se uz ista pravila do kojih smo došli razmatranjem jednodimenzionalnog slučaja; prisjetimo ih se:

1) Ako u početnom trenutku ostvarimo konfiguraciju nekog moda i pustimo sustav da titra, dobit ćemo slobodno titranje danog moda njegovom vlastitom frekvencijom.

2) Ako u početnom trenutku ostvarimo neku superpoziciju dvaju ili više modova i pustimo sustav da titra, svaki mod u superpoziciji titrat će svojom frekvencijom. Svaka čestica sustava titrat će na kompliciran način, superpozicijom dvaju ili više frekvencija.

3) Ako imamo vanjsku pogonsku silu frekvencije ω, nakon nekog vremena (određenog jakošću gušenja) uspostavlja se stacionarno stanje. U stacionarnom stanju svi modovi (izuzetak su oni koja pogonska sila ne može pobuditi zbog sprege sa sustavom) titraju nametnutom frekvencijom ω, ali različitim amplitudama. Kada je pogonska frekvencija jednaka vlastitoj frekvenciji nekog moda, dolazi do rezonancije. Širina rezonancije ovisi o jakosti gušenja.

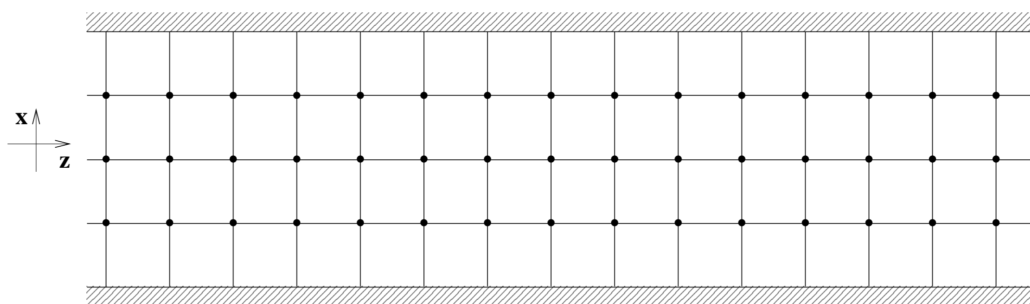
Demonstracijski pokus 5.2: neki modovi dvodimenzionalnog sustava

Važno uočiti: razlike i sličnosti naspram titranja u jednoj dimenziji.

5.3 Mehanički valovod

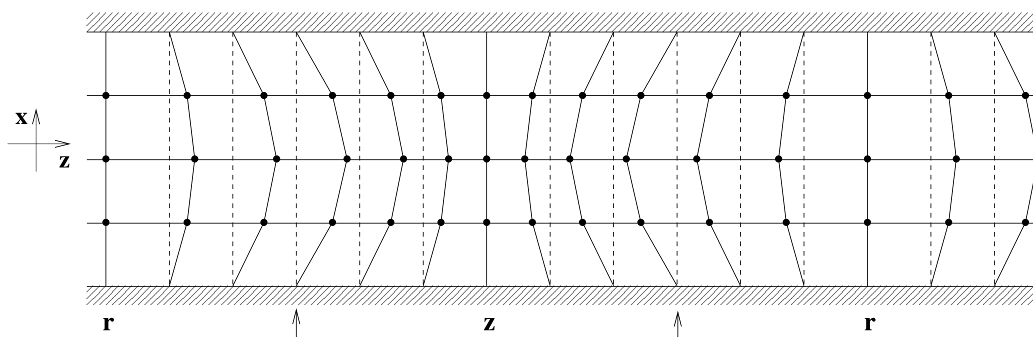
U prethodnom smo poglavlju razmatrali prostorno ograničena višedimenzionalna tijela koja (kao i u slučaju samo jedne dimenzije) titraju u modovima. Ako je sredstvo neograničeno bar u jednom smjeru, onda se u njemu mogu širiti putujući valovi.

Razmotrimo kao primjer pravilnu dvodimenzionalnu mrežu čestica povezanih oprugama (slika 5.10). Neka je mreža ograničena (i fiksirana) u x-smjeru, dok je u z-smjeru neograničena (y-smjer je u ovom primjeru nezanimljiv, koristit ćemo ga kasnije u trodimenzionalnom primjeru). Sistemi poput ovog nazivaju se **mehaničkim valovodom**.



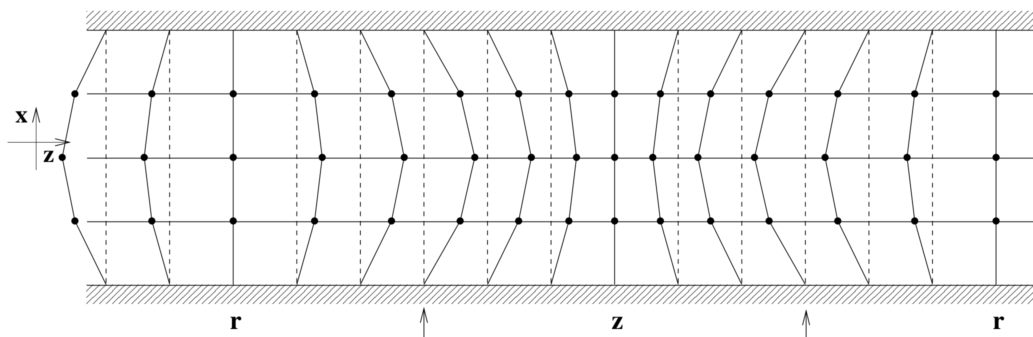
Slika 5.10: Dvodimenzionalna mreža čestica povezanih oprugama neograničena u smjeru osi z.

Ovakvim je sistemom čestica moguće poslati putujući val duž osi z - odnosno jednako titranje susjednih (u z-smjeru) čestica s faznim kašnjenjem. Neka je titranje čestica longitudinalno s obzirom na os širenja vala z (a time i transverzalno s obzirom na os x); u nekom će trenutku sistem izgledati kao na slici 5.11.



Slika 5.11: Sistem sa slike 5.10 u nekom trenutku nakon što se njime proširio putujući val. Mjesta na kojima se desilo maksimalno zgušnjavanje, odnosno razrijeđivanje čestica, označena su sa slovima "z" i "r" ispod sistema. Strelice prikazuju (ravnotežne) lokacije čestica koje su maksimalno otklonjene od položaja ravnoteže.

Zbog longitudinalnosti titranja naspram z-smjera, prolazak putujućeg vala kroz sistem dovest će do njegovog zgušnjavanja i razrijeđivanja - na pojedinim će mjestima gustoća čestica biti povećana, a na pojedinim smanjena. Na slici 5.11 označene su i ravnotežne lokacije čestica koje su u danom trenutku maksimalno otklonjene od položaja ravnoteže; te lokacije nalaze se točno na polovici udaljenosti točaka maksimalne i minimalne gustoće. Dakle, postoji "pomak u fazi" između točaka maksimalnog otklona i točaka maksimalne gustoće - isti je jednak $\pi/2$ (to će nam biti bitno pri diskusiji zvuka u šestom poglavlju).



Slika 5.12: Sistem sa slike 5.11 u nekom kasnijem trenutku.

Prolazak vala kroz sistem dovest će do toga da će u nešto kasnijem trenutku sistem izgledati kao na slici 5.12. Sve relevantne točke (maksimumi i minimumi gustoće, maksimumi otklona iz ravnoteže) pomakle su se udesno za udaljenost definiranu faznom brzinom vala i proteklim vremenskim intervalom - taj je dio opisa širenja vala identičan jednodimenzionalnom slučaju.

Što se dešava u x-smjeru? Duž osi x valno sredstvo je ograničeno, pa se u tom smjeru pojavljuju karakteristični modovi titranja. U primjeru prikazanom na slikama 5.11 i 5.12 realiziran je prvi, najniži mod titranja - između krajeva sistema nalazi se pola sinusoide. U kombinaciji s longitudinalnim putujućim valom u z-smjeru, otklone čestica na lokaciji (x_i,z_l) možemo opisati ovako:

$$u_{il}^{(n)}(t) = A\cos\left(k_x^{(n)}x_i\right)\sin\left(\omega t - k_z z_l\right) \quad .$$

Postavimo li koordinatni sustav tako da je x=0 na polovici mehaničkog valovoda, onda umjesto uobičajenog sinusa u zapisu titranja u modu imamo kosinus, kao u gornjoj jednadžbi. Gledajući

duž osi x, osim prikazanog najnižeg moda, možemo imati i više modove titranja, opisane s diskretnim vrijednostima valnog broja $k_x^{(n)}$:

$$k_x^{(n)} L_x = n\pi \qquad (n = 1, 2, \ldots, N) \quad ,$$

gdje je N ukupan broj čestica u x-smjeru.

Gledajući duž osi z, nema rubnih uvjeta pa k_z može poprimiti kontinuirano sve vrijednosti unutar granica:

$$0 < k_z < \frac{\pi}{a} \quad .$$

Limes $k_z \approx 0$ odgovara dugovalnoj situaciji, dok limes $k_z \approx \pi/a$ vodi na cik-cak konfiguraciju.

U prethodnim smo poglavljima pokazali da je relacija disperzije ista za titranje u modovima i putujućim valovima, samo što su u jednom slučaju moguće vrijednosti valnog broja diskretne (za modove), dok su u drugom slučaju kontinuirane (za putujuće valove). Možemo, dakle, odmah napisati disperzijsku relaciju za ovaj "miješani" slučaj (u analogiji s izrazom 5.6):

$$\omega^{(n)} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sqrt{\sin^2\left(\frac{k_x^{(n)} a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_z a}{2}\right)} \quad .$$

Frekvenciju ω određuje izvor titranja. Valni broj $k_x^{(n)}$ je određen širinom valovoda L_x i rednim brojem moda n - veličina koja je u disperzijskoj relaciji "prilagodljiva" je valni broj k_z. Dakle, vanjskim nametanjem frekvencije definiramo i valnu duljinu λ_z vala koji se širi duž osi z.

Valovod prikazan na slici 5.10 lagano se formalno poopćuje na **trodimenzionalnu** varijantu - takav bi valovod imao za poprečni presjek kvadrat stranica L_x i L_y, a duž osi z ostao bi beskonačno dugačak. Gledano u presjeku valovoda, nalazimo dvodimenzionalne modove s diskretnim vrijednostima za $k_x^{(n)}$ i $k_y^{(p)}$, dok se duž osi z širi putujući val. Valni broj k_z poprima kontinuirane vrijednosti u ovisnosti o frekvenciji ω koju nameće izvor titranja i disperzijskoj relaciji:

$$\omega^{(np)} = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sqrt{\sin^2\left(\frac{k_x^{(n)} a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_y^{(p)} a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_z a}{2}\right)} \quad . \tag{5.8}$$

5.4 Ravni valovi

U trodimenzionalnom valovodu sve čestice u nekom poprečnom presjeku titraju u nekom modu, a time i u fazi (to je svojstvo vlastitih modova titranja diskutirano u prvom poglavlju). Zamišljenu plohu koja spaja čestice iste faze nazivamo **valnom frontom** za dani putujući val. Valne fronte su okomite na smjer širenja vala.

Zamislimo sada da odabranom trodimenzionalnom valovodu povećavamo poprečni presjek, k limesima $L_x \to \infty$ i $L_y \to \infty$. Tako konstruiramo idealizirano neograničeno (tj. "otvoreno") valno sredstvo. Ako razmatramo samo najniži mod titranja u dvodimenzionalnom poprečnom presjeku, onda vrijedi:

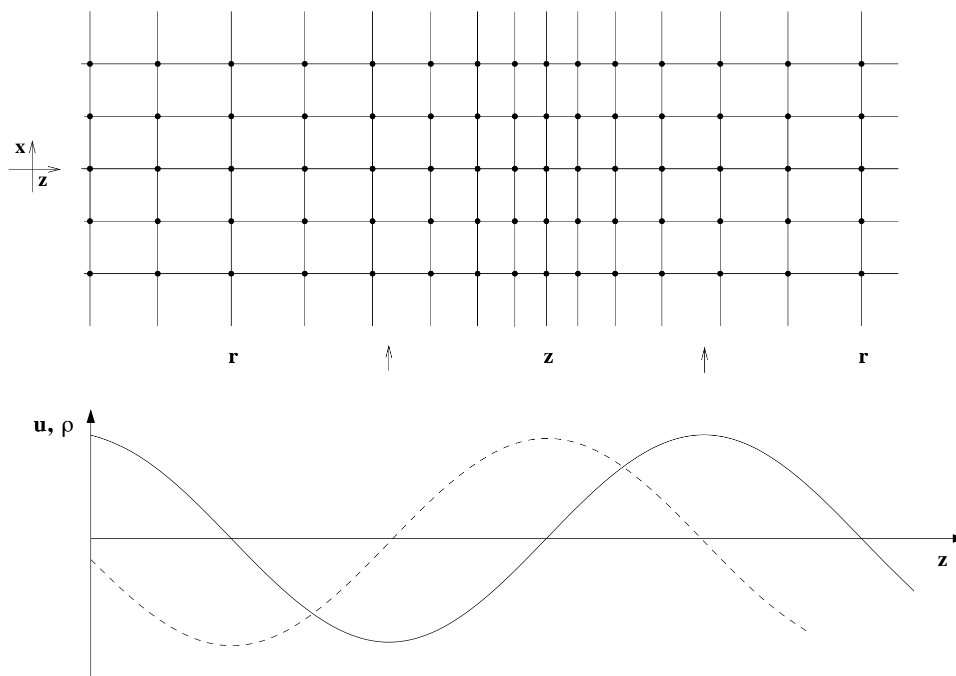
$$k_x^{(1)} L_x = \pi \quad \Rightarrow \quad k_x^{(1)} = \frac{\pi}{L_x} \to 0 \;\; (\text{za } L_x \to \infty) \quad ,$$

$$k_y^{(1)} L_y = \pi \quad \Rightarrow \quad k_y^{(1)} = \frac{\pi}{L_y} \to 0 \;\; (\text{za } L_y \to \infty) \quad .$$

Dakle, u ovom limesu u nekom poprečnom presjeku sve čestice titraju jednakim amplitudama:

$$A\cos\left(k_x^{(1)}x\right)\cos\left(k_y^{(1)}y\right)\rightarrow A\cos 0\cos 0 = A \quad .$$

Valne fronte u ovom limesu postaju ravnine, a amplitude titranja duž tih ravnina konstantne - takve valove nazivamo **ravnim valovima**.



Slika 5.13: Gore: longitudinalni ravni val koji se širi u z-smjeru (u nekom trenutku t). Dolje: ovisnost otklona od položaja ravnoteže u (puna linija) i gustoće čestica ρ (crtkana linija) o koordinati z za val prikazan gore.

Ravni val koji se širi u z-smjeru, a titranje mu je longitudinalno na taj smjer, prikazan je na slici 5.13. Kao i na prethodnim slikama, mjesta na kojima se desilo maksimalno zgušnjavanje, odnosno razrijeđivanje čestica, označena su sa slovima "z" i "r". Strelice prikazuju (ravnotežne) lokacije čestica koje su maksimalno otklonjene od položaja ravnoteže. I točke maksimalne i točke minimalne gustoće nalaze se na mjestima na kojima je pomak čestica iz položaja ravnoteže jednak nuli.

Na donjem dijelu iste slike prikazana je ovisnost otklona od položaja ravnoteže u i gustoće čestica ρ o koordinati z za val prikazan na gornjem dijelu slike. U skladu s prethodnom diskusijom, sinusoide koje prikazuju tu ovisnost imaju istu valnu duljinu, no pomaknute su u fazi za $\pi/2$. Zgušnjenje nastaje zato što su se čestice s lijeve strane od mjesta zgušnjenja pomakle u smjeru $+z$ (pa imaju $u>0$), dok su se čestice s desne strane pomakle u smjeru $-z$ ($u<0$). Kod razrijeđenja je obrnuto. Zbog faznog kašnjenja među valnim frontama, područje zgušnjenja (razrijeđenja) se pomiče duž osi z faznom brzinom v_f.

Do sada smo za prikaz valova i titranja koristili Kartezijev koordinatni sustav s osima x, y i z. Umjesto označavanja položaja neke čestice s kooridnatama (x,y,z), ponekad je praktičnije njen položaj prikazati preko vektora položaja $\vec{r}$, koji spaja odabrano ishodište O s danom česticom. Valna se funkcija tada može zapisati u ovom obliku:

$$u\left(\vec{r},t\right) = A\sin\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) \quad .$$

Ovom jednadžbom uveden **valni vektor** $\vec{k}$ ima smjer jednak smjeru širenja vala, a po iznosu je jednak valnom broju k=$2\pi/\lambda$. Za česticu u ishodištu vrijedi $\vec{r}$=0, pa je njeno titranje dano izrazom:

$$u(t) = A \sin(\omega t) \quad .$$

No taj isti izraz vrijedi i za sve čestice u ravnini koja prolazi ishodištem O i okomita je na valni vektor $\vec{k}$, jer za sve njih vrijedi:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = 0 \quad .$$

Za sve druge ravnine okomite na $\vec{k}$ (dakle, one koje ne prolaze kroz ishodište), vrijedi:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = kr \cos\theta = \text{konst.} \quad ,$$

jer je za danu ravninu projekcija vektora $\vec{r}$ na $\vec{k}$ konstantna. To je konzistentno s prijašnjim zaključkom - ravnine okomite na valni vektor (tj. smjer širenja) su valne fronte ravnog vala. U svim točkama neke valne fronte imamo istu fazu titranja:

$$u(t) = A \sin(\omega t - \phi) \quad ,$$

gdje je:

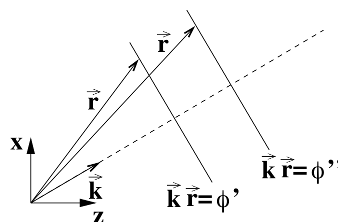
$$\phi = \vec{k} \cdot \vec{r}$$

fazno kašnjenje u odnosu na valnu frontu koja prolazi kroz ishodište. Relativno fazno kašnjenje između dvaju valnih fronti je dano s:

$$\Delta\phi = \phi'' - \phi' \quad .$$

Do sada smo uvijek koordinatni sustav postavljali tako da se smjer širenja vala poklapao s pozitivnim smjerom osi z. U općenitom slučaju valni vektor $\vec{k}$ može biti usmjeren u bilo kojem smjeru (kao na slici 5.14), tako da u raspisu po koordinatama vrijedi:

$$u(\vec{r}, t) = A \sin\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) = A \sin(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) \quad .$$



Slika 5.14: Ravni val koji se širi u proizvoljnom smjeru. Označene su i dvije valne fronte čije je fazno kašnjenje u odnosu na valnu frontu koja prolazi kroz ishodište jednako ϕ', odnosno ϕ''.

5.4.1 Ravni val u kontinuumu

Kao model neograničenog valnog sredstva uzeli smo trodimenzionalnu mrežu opruga i čestica s masama. Ako razmatramo valove kod kojih su valne duljine mnogo veće od udaljenosti među česticama, onda to sredstvo možemo tretirati kao elastični kontinuum u tri dimenzije. Ravne valove smo u tom sustavu dobili krećući od disperzijske relacije za trodimenzionalni valovod (izraz 5.8):

$$\omega = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sqrt{\sin^2\left(\frac{k_x a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_y a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_z a}{2}\right)} \quad ,$$

te dopuštajući da valovod postaje sve širi ($L_x \to \infty$ i $L_y \to \infty$, tada vrijedi i $k_x \to 0$ i $k_y \to 0$). U tom slučaju prva dva sinusna člana pod korijenom iščezavaju, kao i odgovarajuće povratne sile u x- i y-smjeru. Preostaje samo povratna sila od opruga duž osi z, tj. treći član pod korijenom. U aproksimaciji kontinuuma dobivamo, dakle:

$$\omega = \sqrt{\frac{4K}{m}} \sin\left(\frac{k_z a}{2}\right) \approx \sqrt{\frac{4K}{m}} \frac{k_z a}{2} = \sqrt{\frac{Ka^2}{m}} k_z \quad .$$

Uvedimo sada veličine kojima ćemo karakterizirati trodimenzionalan kontinuum, za **gustoću mase** u tri dimenzije uvodimo:

$$\rho = \frac{m}{a^3} \quad ,$$

dok ćemo elastičnost trodimenzionalnog kontinuuma (tj. jakost povratnih sila) karakterizirati veličinom koju smo na "Općoj fizici 1" nazvali **Youngovim modulum elastičnosti** Y i koja je jednaka omjeru vlačnog naprezanja i relativne vlačne deformacije (ili tzv. izvlačenja):

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{Y} \frac{F_\perp}{S} \quad . \tag{5.9}$$

Youngov modul elastičnosti ima dimenziju sile na površinu (tj. tlaka), a npr. za aluminij je jednak $7{\cdot}10^{10}$ Nm^{-2}, dok je za "vrlo čvrst" čelik otprilike tri puta veći, $20{\cdot}10^{10}$ Nm^{-2}. Povežimo gornju definiciju s mikroskopskim razmatranjem - ako elastično tijelo duljine L pod djelovanjem vanjske sile $F_\perp$ rastegnemo za ΔL, onda vrijedi:

$$F_\perp = K \Delta L \quad ,$$

pa uvrštavanjem u izraz 5.9 dobivamo:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{Y} \frac{K \Delta L}{S} \qquad \Rightarrow \qquad Y = \frac{KL}{S} \quad .$$

Na modelu jednostavne trodimenzionalne mreže opruga i čestica, omjer duljine i poprečnog presjeka na mikroskopskom je nivou dan s $a{:}a^2$, pa konačno dobivamo:

$$Y = \frac{K}{a} \quad .$$

Dakle, Youngov modul Y možemo interpretirati kao silu (Ka) duž osi z koja djeluje na jedinicu površine (a^2) u xy-ravnini, a koja je posljedica djelovanja susjedne ravnine u kojoj se nalaze čestice. Pri tome na svaku česticu djeluje sila Ka - međutim, svaka čestica je u vrhu četiri kvadrata, pa svakom od njih "pripada" sila $1/4Ka$. No budući da svaki kvadrat ima 4 čestice u vrhovima, ukupna sila na kvadrat je Ka, a njegova površina a^2.

Uz ovako raspisan Youngov modul elastičnosti, možemo konačno napisati i relaciju disperzije za ravan val u elastičnom kontinuumu:

$$\omega = \sqrt{\frac{Ka^2}{m}} k = \sqrt{\frac{Ya \cdot a^2}{\rho a^3}} k = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} k \quad ; \tag{5.10}$$

(umjesto k_z ovu smo relaciji zapisali preko k da naglasimo da vrijedi uvijek, neovisno o smjeru širenja vala u otvorenom kontinuumu).

Za faznu i grupnu brzinu ovakvog ravnog vala dobivamo:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad ,$$

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad .$$

Fazna i grupna brzina su iste, kao i uvijek za slučaj linearne disperzijske relacije. Pogledajmo koje su tipične brzine; npr. za val u aluminiju dobivamo:

$$v_\phi = \sqrt{\frac{7 \cdot 10^{10}\ \mathrm{N\,m^{-2}}}{2.7 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}}} = 5.1 \cdot 10^3\ \mathrm{m\,s^{-1}} \quad .$$

Zadnji dobiveni izrazi strogo vrijede samo za tijela koja su u smjeru širenja longitudinalnog vala bitno dulja nego u ostala dva smjera - takve su npr. željezničke tračnice, pa gornji izraz možemo iskoristiti za račun brzine zvuka u njima (za zvuk ćemo u sljedećem poglavlju pokazati da se opisuje kao val čije širenje vodi na longitudinalno titranje čestica medija kojim se širi). Za sve se metale (pa time i tračnice) dobiva brzina od par tisuća metra u sekundi, za red veličine više od brzine zvuka u zraku. Za valove u općenitom trodimenzionalnom slučaju (kakva je npr. situacija kod širenja sezmičkih valova) gornji se izrazi netrivijalno kompliciraju.

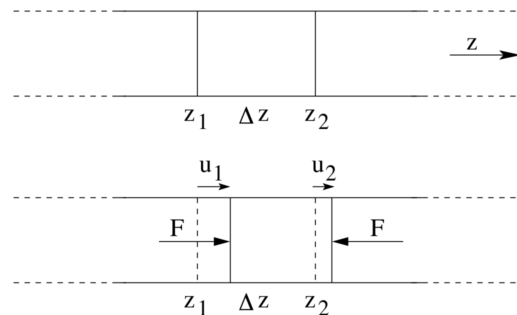
Impedanciju za širenje ravnih valova trodimenzionalnim valovodom definirat ćemo krećući od impedancije za val u jednoj dimenziji: $Z{=}\sqrt{T\rho}$, gdje je ρ bila linearna gustoća mase. Pri prelasku na tri dimenzije linearnu gustoću ćemo zamijeniti trodimenzionalnom (mjerne jedinice kg/m^3), a napetost kao mjeru povratne sile s Youngovim modulom Y; ovakva "preformulirana" impedancija jednaka je, dakle:

$$Z = \sqrt{Y\rho} \quad . \tag{5.11}$$

Po dimenziji (mjernoj jedinici), ova se impedancija razlikuje od one u jednodimenzionalnom slučaju; kasnije ćemo pokazati da je uz ovakvu definiciju impedancija faktor proporcionalnosti između tlaka i brzine longitudinalnog titranja čestica (u jednoj dimenziji bila je faktor proporcionalnosti između sile i brzine titranja). Na primjeru aluminija pogledajmo još i tipične vrijednosti za impedanciju:

$$Z = \sqrt{Y\rho} = \sqrt{7 \cdot 10^{10}\ \mathrm{N\,m^{-2}} \cdot 2.7 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}} = 1.4 \cdot 10^7\ \mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-1}} \quad .$$

Aluminij ima jako veliku impedanciju za val kod kojeg longitudinalno titraju njegove sastavne čestice (atomi) - i ostali metali imaju impedancije istog reda veličine.



Slika 5.15: Dio elastične šipke u ravnotežnom položaju (gore) i uz longitudonalni val u njoj (dolje).

Razmotrimo jedan segment šipke od nekog elastičnog materijala. Ravnotežno stanje dok u šipki nema vala dano je na gornjem dijelu slike 5.15. Kada se u promatranom dijelu šipke uspostavi longitudinalni val opisan izrazom $u(z{,}t){=}A\sin(\omega t - kz)$, onda je stanje šipke u nekom trenutku dano kao na donjem dijelu slike 5.15. Sila F na slici pritišće promatrani segment s obje strane (jer ta će sila stvarati tlak koji nas zanima); očekujemo stoga skraćivanje segmenta pod utjecajem

te sile. Duljina segmenta Δz smanjila se za razliku $u_1 - u_2$ (općenito je, dakako, moguće da se ista i povećala, no varijanta sa skraćivanjem dozvoljava nam kasnije intuitivnije uvođenje tlaka). Razmatramo li to stanje kao elastičnu deformaciju (kompresiju segmenta), tada možemo pisati:

$$\frac{F}{S} = Y \frac{u_1 - u_2}{\Delta z} \quad ,$$

gdje je sila F okomita na poprečni presjek S. Za dovoljno malen Δz možemo iskoristiti razvoj:

$$u_2 = u(z_2, t) = u(z_1 + \Delta z, t) \approx u(z_1, t) + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z = u_1 + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z \quad ,$$

da bi dobili:

$$\frac{F}{S} = Y \frac{u_1 - u_2}{\Delta z} = Y \frac{-\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z}{\Delta z} = -Y \frac{\partial u}{\partial z} \quad . \tag{5.12}$$

U stlačenom se segmentu pojavljuje tlak p koji je po iznosu jednak F/S. Negativan predznak u ovom izrazu govori da se na mjestima gdje je $\partial u / \partial z$ negativan, tlak pozitivan, tj. imamo zgušnjenje čestica.

Zaključujemo: ako u kontinuumu imamo val pomaka čestica

$$u(z, t) = A \sin(\omega t - kz) \quad ,$$

nužno imamo i val tlaka:

$$p(z, t) = -Y \frac{\partial u}{\partial z} = YkA \cos(\omega t - kz) \quad . \tag{5.13}$$

Tlak p u šipci ovisi o amplitudi pomaka A, o modulu elastičnosti Y, te o valnoj duljini λ (odnosno valnom broju k) dotičnog vala. Val tlaka $p(z, t)$ nije u fazi s valom pomaka $u(z, t)$, već s valom brzine čestice. Budući da se kosinus istovjetan onome iz izraza 5.13 pojavljuje i pri parcijalnom deriviranju izraza za val pomaka po vremenu, jednadžbu 5.12 možemo zapisati i ovako:

$$p(z, t) = -Y \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = YkA \cos(\omega t - kz) = \frac{Yk}{\omega} \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \quad .$$

Uz disperzijsku relaciju, $\omega = \sqrt{(Y/\rho)}k$, konačno dobivamo:

$$p(z, t) = \sqrt{Y\rho} \cdot \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = Z \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \quad . \tag{5.14}$$

Dakle, kod longitudinalnog ravnog vala u trodimenzionalnom kontinuumu, **impedancija povezuje tlak s brzinom čestice** na istom mjestu i u istom trenutku.

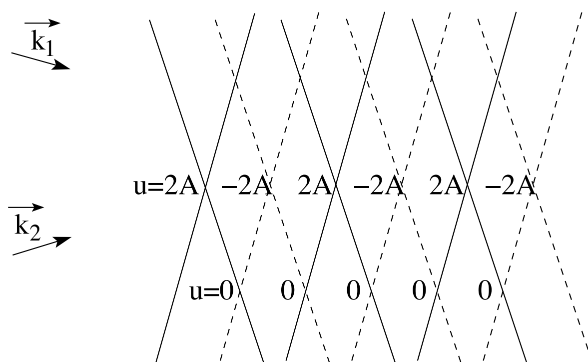
Intenzitet ravnog vala I definira se kao snaga (tj. energija u jedinici vremena) koja se prenosi kroz jediničnu površinu okomito na smjer širenja vala. Budući da tlak $p = F/S$ upravo daje silu po jedinici poprečne površine, za intenzitet se dobiva kao:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{T} \int_0^T p(z, t) \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T Z \left(\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \right)^2 \mathrm{d}t = \\ &= \omega^2 A^2 Z \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kz) \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 A^2 Z \quad . \end{aligned} \tag{5.15}$$

Dobiveni izraz za intenzitet ravnog vala u kontinuumu identičan je izrazu za snagu koja se prenosi u transverzalnom valu u jednodimenzionalnom kontinuumu (npr. elastičnoj niti). Međutim, impedancija Z u trodimenzionalnom kontinuumu ima drugačiju dimenziju ($\mathrm{Nm^{-3}s}$) od impedancije Z u jednodimenzionalnom sredstvu ($\mathrm{Nm^{-1}s}$) - to je ujedno i razlika u dimenziji intenziteta ravnog vala i snage jednodimenzionalnog vala.

5.5 Interferencija valova

Interferencija (ili miješanje) valova je pojava koja nastaje kada se u prostoru preklope dva vala istih frekvencija, koja se općenito šire u različitim smjerovima. Pogledajmo interferenciju dvaju ravnih valova s valnim vektorima $\vec{k}_1$ i $\vec{k}_2$. Stanje valova u nekom trenutku prikazat ćemo pomoću valnih fronti, kao na slici 5.16. Valne fronte koje odgovaraju maksimumu otklona (u=A) na slici su označene punom linijom, dok su valne fronte koje odgovaraju maksimalno negativnom otklonu (u=$-A$) označene crtkano.



Slika 5.16: Interferencija ravnih valova.

Do interferencije, dakako, dolazi u svim točkama prostora u kojima se valovi preklapaju - no posebno se ističu lokacije na kojima se susreću dvije pozitivne amplitude (sjecišta punih linija na slici 5.16), gdje je ukupni otklon čestica iz ravnoteže jednak A+A=$2A$. Isto se tako ističu mjesta gdje je ukupni otklon $-A-A$=$-2A$ (sjecišta crtkanih linija na slici 5.16). Nadalje, nalazimo i mjesta gdje zbrajanjem otklona dobivamo ukupno $A-A$=0 (sjecišta punih s crtkanim linijama na slici 5.16) - na tim mjestima nema otklona iz položaja ravnoteže.

Da bi interferencijska slika bila stabilna, *nužno* je da oba vala imaju istu frekvenciju ω. Budući da se oba vala šire u istom sredstvu (Y i ρ su im isti), i valni broj k im uz istu frekvenciju (po disperzijskoj relaciji) mora biti jednak po iznosu (*smjer* vektora $\vec{k}_1$ i $\vec{k}_2$ ostaje različit). Tada su i fazne brzine valova iste (po iznosu) - nakon polovice perioda titranja ($T/2$), dvostruke pozitivne amplitude ($2A$) dobivamo na mjestima gdje su se prije nalazile dvostruke negativne amplitude ($-2A$) - širenje vala amplitude $2A$ efektivno se dešava u vodoravnom smjeru na slici 5.16. Paralelno tome, nalazimo linije duž kojih trajno vrijedi u=0 (nema titranja čestica). I jedne i druge lokacije ponavljaju se iznad i ispod segmenta prikazanog na slici (jer su valne fronte ravnog vala prostorno neograničene). Nizovi valova amplituda $2A$ čine **konstruktivnu interferenciju**, dok nizovi lokacija gdje se titranje poništava nazivamo **destruktivnom interferencijom**.

Iste zaključke možemo dobiti i matematički. Ukupan otklon neke čestice u području unutar kojeg valovi interferiraju dan je s:

$$u = A \sin\left(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r}\right) + A \sin\left(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r}\right) \quad .$$

Iskoristimo li trigonemetrijsku relaciju:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \quad ,$$

dobivamo:

$$u = 2A\cos\left(\frac{\vec{k}_2 - \vec{k}_1}{2}\cdot\vec{r}\right)\sin\left(\omega t - \frac{\vec{k}_1 + \vec{k}_2}{2}\cdot\vec{r}\right) \quad ,$$

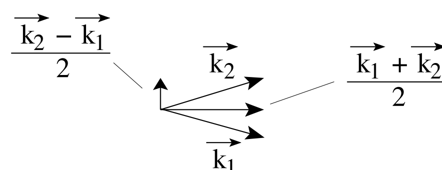
Dakle, interferencijom dva ravna vala dobivamo val koji se širi duž smjera (označimo ga s z) definiranog s valnim vektorom:

$$\vec{k}_z = \frac{\vec{k}_1 + \vec{k}_2}{2} \qquad , \qquad k_z = \left|\vec{k}_z\right| \quad ,$$

dok u okomitom smjeru (označimo ga s x) nastaje mod titranja s valnim vektorom:

$$\vec{k}_x = \frac{\vec{k}_2 - \vec{k}_1}{2} \qquad , \qquad k_x = \left|\vec{k}_x\right| \quad .$$

Ovi valni vektori prikazani su na slici 5.17.



Slika 5.17: Veza između valnih vektora ravnih valova sa slike 5.16.

Uz novodefinifrane valne vektore (i brojeve), možemo konačno pisati:

$$u = 2A\cos(k_x x)\sin(\omega t - k_z z) \quad . \tag{5.16}$$

Treba uočiti da veličine k_x i k_z ovise i o kutu između valnih vektora $\vec{k}_1$ i $\vec{k}_2$ (tj. o kutu između smjerova širenja dvaju ravnih valova). Ako se taj kut smanjuje, dva ravna vala postaju paralelni i $k_x \to 0$ - valna duljina duž osi x teži k beskonačnosti (tj. interferencijom ravnih valova tada dobivamo val koji je i sam ravan). Ako povećavamo kut između $\vec{k}_1$ i $\vec{k}_2$, onda raste i k_x (a λ_x se smanjuje) - to znači da se izmjene trbuha i čvorova u modu duž osi x gušće (češće).

Demonstracijski pokus 5.3: interferencija valova na vodi

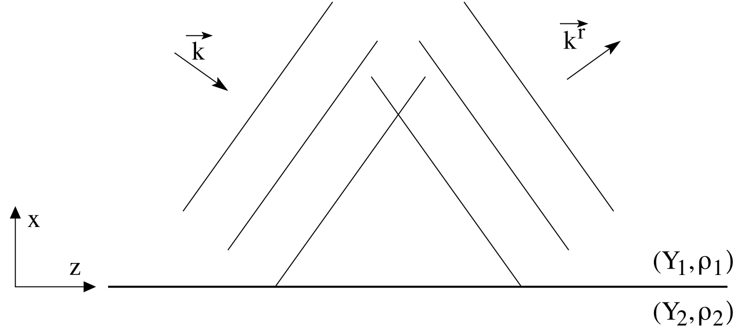
Važno uočiti: ponašanje interferentnog uzorka u vremenu.

5.6 Refleksija i transmisija ravnih valova

Neka se ravan val amplitude A i frekvencije ω širi u jednom valnom sredstvu i nailazi na graničnu plohu s drugim valnim redstvom, kao na slici 5.18. Ako se impedancije dvaju sredstava ($Z_1 = \sqrt{Y_1 \rho_1}$, $Z_2 = \sqrt{Y_2 \rho_2}$) međusobno razlikuju, onda općenito dolazi do djelomične refleksije, te djelomične transmisije vala.

Razmotrimo najprije **reflektirani val**; označimo valni vektor upadnog vala s $\vec{k}$, a reflektiranog vala $\vec{k}^r$. Koordinatni sustav postavimo tako da se os z poklapa s granicom dva valna sredstva, dok je os x okomita na nju, te s osi z definira ravninu u kojoj se nalazi valni vektor $\vec{k}$ (vidi sliku 5.18). Treća prostorna os (y) okomita je na osi x i z; granična ploha prostire se, dakle, u ravnini yz. Valna funkcija upadnog vala dana je s:

$$u_u = A_u \sin\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right) = A_u \sin(\omega t - k_x x - k_z z) \quad .$$



Slika 5.18: Refleksija ravnog valna na granici dva valna sredstva.

Titranje upadnog vala u dvama točkama razmaknutim za Δz duž osi z ima faznu razliku jednaku $k_z \Delta z$. Valna funkcija reflektiranog vala općenito je dana s:

$$u_r = A_r \sin\left(\omega t - \vec{k}^r \cdot \vec{r}\right) = A_r \sin\left(\omega t - k_x^r x - k_y^r y - k_z^r z\right) \quad .$$

Daljnji izvod bazira se na činjenici da relativan fazni odnos titranja upadnog i reflektiranog vala mora biti isti u svim točkama na graničnoj plohi. Tomu je tako jer su čestice na graničnoj plohi pobuđene na titranje upadnim valom, a istovremeno igraju ulogu izvora za reflektirani val (a i transmitirani val koji ćemo diskutirati kasnije). Dakle, bilo koji fazni pomak u titranju tih čestica uzrokovan faznim kašnjenjem upadnog vala na nekoj lokaciji, direktno će se preslikavati na reflektirani (i transmitirani) val.

Uzmemo li na graničnoj plohi dvije točke duž osi y, one imaju istu fazu titranja za upadni val (jer se valni vektor $\vec{k}$ nalazi u xz-ravnini, tj. k_y=0). Dakle, kašnjenje $k_y \Delta y$ mora biti jednako nuli za proizvoljan razmak među odabranim točkama Δy. Stoga ni reflektirani val ne može imati promjenu faze duž osi y na graničnoj plohi, tj. mora vrijediti $k_y^r \Delta y$=0 za svaki Δy, što povlači k_y^r=0. Drugim riječima, valni vektor $\vec{k}^r$ također leži u xz-ravnini.

Preostaju samo fazne razlike između točaka na graničnoj plohi duž osi z. Da se relativan fazni odnos upadnog i reflektiranog vala ne bi mijenjao od točke do točke na graničnoj plohi, mora vrijediti:

$$k_z \Delta z = k_z^r \Delta z \quad ,$$

tj. promjena faze titranja mora biti ista bez obzira gledamo li upadni ili reflektirani val. Slijedi:

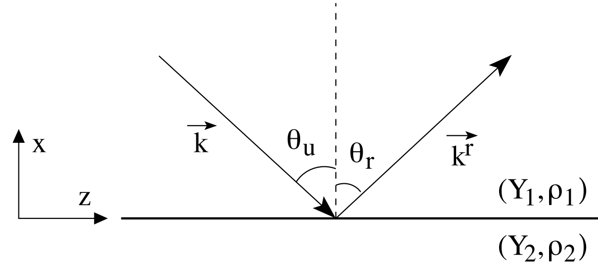
$$k_z = k_z^r \quad .$$

Budući da se upadni i reflektirani val šire u istom sredstvu (što znači da zadovoljavaju istu disperzijsku relaciju) i titraju istim frekvencijama, i iznosi valnih vektora (drugim riječima: valni brojevi) moraju im biti jednaki, tj. mora vrijediti: k=k^r. Dakle, ukupni valni brojevi moraju biti isti za dva vala, a prije smo zaključili da to mora vrijediti i njihove z-projekcije. Stoga i iznosi x-projekcija valnih brojeva moraju biti jednaki (to jednostavno vidimo iz Pitagorinog teorema), dok nam je za predznak jasno da mora biti suprotan (upadni val se približava granici valnih sredstava, dok se reflektirani udaljava). Dakle, vrijedi:

$$k_x = -k_x^r \quad .$$

Predznakom minus uzimamo u obzir da se upadni i reflektirani val šire duž suprotnih smjerova osi x.

Dobivena pravila za refleksiju ravnog vala možemo kompaktnije zapisati uvedemo li kutove θ između okomice na graničnu plohu i odgovarajućeg valnog vektora (smjera širenja vala), kao na slici 5.19. Kut upadnog vala označili smo s θ_u, a kut reflektiranog s θ_r. Gore smo zaključili da se pri



Slika 5.19: Refleksija ravnog vala.

refleksiji k_z ne mijenja, a k_x ostaje jednak po iznosu, no mijenja smjer - to se postiže samo kada je kut upada θ_u jednak kutu refleksije, θ_r:

$$\theta_u = \theta_r \quad . \tag{5.17}$$

Ovo je **zakon refleksije** ravnog vala.

Treba uočiti da upadni i reflektirani val zadovoljavaju uvjet za (stacionarnu) interferenciju valova jer imaju istu frekvenciju, te se šire u istom sredstvu u različitim smjerovima (dakle, imaju isti valni broj k, dok im valni vektori imaju različit smjer). Vektor koji definira "putujuću komponentu" u izrazu 5.16, $\left(\vec{k} + \vec{k}^r\right)/2$, ima smjer duž osi z - stoga duž osi z nalazimo pruge putujućeg vala, a duž osi x imamo trbuhe i čvorove modova titranja.

Razmotrimo sada **transimitirani val**, tj. val koji se širi u drugom sredstvu (s Y_2,ρ_2). Označimo s $\vec{k}^t$ valni vektor transmitiranog vala - on ima istu frekvenciju kao i upadni val, ali je zbog disperzijske relacije veza između frekvencije i valnog broja različita u različitim valnim sredstvima, pa je k^t općenito različit od k za upadni val.

Relativan odnos faze titranja upadnog, reflektiranog i transmitiranog vala je ista u svakoj točki na granici dvaju sredstava. Budući da za upadni ravni val nema razlike faza između dvaju točaka duž osi y (k_y=0 pa je i $k_y\Delta y$=0), isto mora vrijediti i za transmitirani val, pa zaključujemo da je $k^t_y\Delta y$=0, odnosno k^t_y=0. Valni vektor transmitiranog ravnog vala leži u istoj ravnini kao i valni vektori upadnog i reflektiranog vala - taj je zaključak, dakako, neovisan o izboru koordinatnog sustava.

Između dvaju točaka duž osi z na graničnoj plohi upadni val ima razliku faza $k_z\Delta z$. Transmitirani val mora imati istu razliku faza, pa vrijedi:

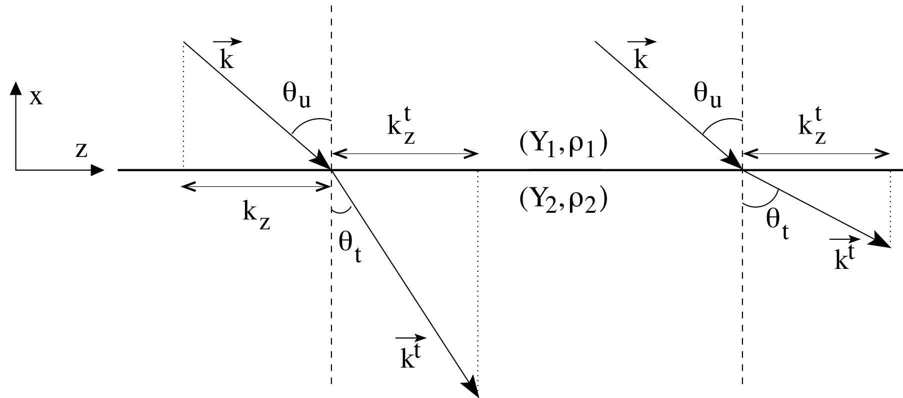
$$k_z\Delta z = k^t_z\Delta z \quad ,$$

iz čega slijedi:

$$k_z = k^t_z \quad .$$

Taj je rezultat isti kao kod reflektiranog vala.

Budući je valni broj transmitiranog vala k^t općenito različit od valnog broja upadnog vala k (konstante u disperzijskim relacijama su različite u dva sredstva), ta se razlika tada ogleda u njihovim x-komponentama (dakle, komponentama okomitim na graničnu plohu). Ovisno o tome koja je od njih veća, imat ćemo dvije različite situacije pri transmisiji (prikazane na slici 5.20). U analogiji s prethodnim definicijama, kut između okomice na graničnu plohu i valnog vektora transmitiranog vala označit ćemo s θ_t.



Slika 5.20: Transmisija ravnog vala.

Ako je $k^t > k$, onda dobivamo $\theta_t < \theta_u$, kao što je prikazano na lijevom dijelu slike 5.20. Transmitirani se val lomi **prema okomici** na graničnu plohu. Ako je pak $k^t < k$, onda se dobiva $\theta_t > \theta_u$, kao što je prikazano na desnom dijelu slike 5.20. Transmitirani se val tada lomi **od okomice** na graničnu plohu.

U oba slučaja vrijedit će isti zakon loma - njega dobivamo iz sljedećeg razmatranja. Za upadni val općenito vrijedi:

$$\sin\theta_u = \frac{k_z}{k} \quad .$$

Za transmitirani val analogno vrijedi:

$$\sin\theta_t = \frac{k_z^t}{k^t} \quad .$$

Podijelimo li ova dva izraza, uz uvjet $k_z^t = k_z$, dobivamo:

$$\frac{\sin\theta_u}{\sin\theta_t} = \frac{k^t}{k} \quad .$$

Budući da upadni i transmitirani val imaju istu frekvenciju, disperzijske relacije (relacije istog oblika za dva različita valna sredstva) daju:

$$\omega = \sqrt{\frac{Y_1}{\rho_1}} k = \sqrt{\frac{Y_2}{\rho_2}} k^t \quad .$$

Dakle, odnos upadnog kuta θ_u i kutra transmisije θ_t ovisi samo o svojstima dvaju valnih sredstava:

$$\frac{\sin\theta_u}{\sin\theta_t} = \frac{\sqrt{\frac{Y_1}{\rho_1}}}{\sqrt{\frac{Y_2}{\rho_2}}} \quad .$$

Ove relacija daje **zakon loma**. Isti se obično izražava preko brzine vala $v = \sqrt{Y/\rho}$ (u kontinuumu su fazna i grupna brzine iste, $v = v_\phi = v_g$), pa pišemo:

$$\frac{\sin\theta_u}{\sin\theta_t} = \frac{v_1}{v_2} \quad .$$

Dakle, zakon loma nam kaže da je omjer sinusa kutova jednak omjeru brzina pri prelasku iz jednog valnog sredstva u drugo.

5.6.1 Totalna refleksija

Kada val upada iz sredstva u kojem ima manju brzinu i djelomično se transmitira u sredstvo u kojem mu je brzina veća ($v_1<v_2$), lomi se od okomice na graničnu plohu ($\theta_u<\theta_t$). Porastom upadnog kuta θ_u, rasti će i kut loma θ_t (koji je veći). U jednom će času kut loma θ_t dostići svoju maksimalnu vrijednost, $\pi/2$ - upadni kut kada se to desi nazivamo kritičnim kutom. Za veći upadni kut nemoguć je nastanak transmitiranog vala u drugom sredstvu - u tom slučaju postoji samo reflektirani val u prvom sredstvu. Ova se pojava naziva **totalna refleksija** (ili potpuno odbijanje), a detaljnije ćemo ju diskutirati u poglavlju o optici. Tada ćemo pokazati da se i intenzitet transmitiranog vala "glatko približava" nuli kada se upadni kut približava kritičnom.

5.6.2 Koeficijenti refleksije i transmisije

Razmatrajući jednodimenzionalne valove odmak čestica od ravnoteže u i amplitudu vala A tretirali smo kao skalare i pomoću njih našli koeficijente refleksije i transmisije. U ovom poglavlju (kada je upadni kut različit od nule), otklon u moramo razmatrati kao vektorsku veličinu, $\vec{u}$, kao i odgovarajuću amplitudu, $\vec{A}$. Te veličine općenito imaju različite smjerove za upadni, reflektirani i transmitirani val. Ograničimo li svoje razmatranje na *longitudinalne valove*, vektori $\vec{A}_u$, $\vec{A}_r$ i $\vec{A}_t$ imaju smjerove jednake odgovarajućim valnim vektorima (smjerovima širenja vala). Da bi našli koeficijent refleksije ovim pristupom, trebali bi rastavljati vektore na komponente i postavljati rubne uvjete na graničnoj plohi - matematički gledano, to je prilično zamršen zadatak.

Puno je jednostavnije problem riješiti pomoću neke skalarne veličine, npr. tlaka uvedenog pri razmatranju ravnog vala u kontinuumu. Uz koordinatni sustav definiran kao na slici 5.20 i uz upotrebu istih oznaka kao i prethodnom tekstu, možemo pisati:

$$p_u(x,z,t) = P_u \cos\left(\omega t - k_x x - k_z z\right) \quad , \tag{5.18}$$

$$p_r(x,z,t) = P_r \cos\left(\omega t - k_x^r x - k_z^r z\right) \quad , \tag{5.19}$$

$$p_t(x,z,t) = P_t \cos\left(\omega t - k_x^t x - k_z^t z\right) \quad . \tag{5.20}$$

Uočite da je uz oznake kao na slici 5.20, x-projekcija valnog broja upadnog vala k_x negativna! Os x definirana je tako da je na čitavoj graničnoj plohi x=0; uvrštavanjem u gornju jednadžbu dobivamo:

$$p_u(0,z,t) = P_u \cos\left(\omega t - k_z z\right) \quad ,$$

$$p_r(0,z,t) = P_r \cos\left(\omega t - k_z^r z\right) \quad ,$$

$$p_t(0,z,t) = P_t \cos\left(\omega t - k_z^t z\right) \quad .$$

Ranije smo pokazali da vrijedi:

$$k_z = k_z^r = k_z^t \quad ,$$

pa su sve tri kosinusne funkcije u gornjim izrazima jednake.

U prvom (gornjem) valnom sredstvu i upadni i reflektirani val doprinose ukupnom tlaku - isti, dakle, nalazimo kao sumu doprinosa tlakova svakog vala. To vrijedi u čitavom sredstvu, pa i na granici s drugim valnim sredstvom. Približavamo li se granici s druge (donje) strane, relevantan tlak je jednostavno tlak parcijalnog vala. Na samoj granici tlak mora biti jednoznačan, neovisan o tome računamo li ga preko "recepta" za gornje ili donje valno sredstvo. Dobivamo stoga prvi uvjet za tlakove na graničnoj plohi:

$$P_u + P_r = P_t \quad . \tag{5.21}$$

Ova jednakost vrijedi za svaku točku (tj. bilo koji z i y) na graničnoj plohi (x=0), te za svaki trenutak t. Ovaj uvjet može se dobiti i razmatranjem sila na element površine na graničnoj plohi -

te sile moraju biti jednake, što se svodi na dani uvjet za tlakove.

Drugi uvjet koji možemo staviti na pomake na samoj graničnoj plohi je sljedeći:

$$(u_u)_x + (u_r)_x = (u_t)_x \quad . \tag{5.22}$$

Ovaj uvjet predstavlja kontinuitet pomaka čestica duž osi x na prijelazu iz jednog sredstva u drugo. Na određeni način, ovaj uvjet osigurava trajan dodir dvaju sredstava u svim točkama granične plohe.

Želimo li kombinirati gornja dva uvjeta, izraz 5.22 moramo zapisati preko tlaka. Veza je bila dana izrazom 5.13, za slučaj kada se val širi u z-smjeru:

$$p(z,t) = -Y\frac{\partial u}{\partial z} \quad .$$

Za val sinusoidalnog oblika (koji se širi u z-smjeru):

$$u(z,t) = A\sin(\omega t - kz) \quad ,$$

dobivamo:

$$p(z,t) = YkA\cos(\omega t - kz) \quad ,$$

odnosno:

$$\frac{\partial p(z,t)}{\partial z} = Yk^2 A\sin(\omega t - kz) = Yk^2 u(z,t) \quad . \tag{5.23}$$

Pri razmatranju u ovom poglavlju val se *ne širi* u z-smjeru pa gornje izraze trebamo "prevesti" na slučaj širenja u proizvoljnom smjeru. Pretpostavimo, dakle, da se val širi duž proizvoljnog smjera - zbog toga ćemo parcijalnu derivaciju samo po z-smjeru u prethodnom izrazu zamijeniti sa sumom parcijalnih derivacija s odgovarajućim jediničnim vektorima smjera:

$$\frac{\partial p(z,t)}{\partial z} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial p(x,y,z,t)}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial p(x,y,z,t)}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial p(x,y,z,t)}{\partial z}\hat{z} = \vec{\nabla} p \quad .$$

Nadalje, otklon u ćemo sada pisati kao vektorsku veličinu koja može imati sve tri komponente (u_x, u_y i u_z); izraz 5.23 tada postaje:

$$\vec{u} = \frac{1}{Yk^2}\vec{\nabla} p \quad .$$

Iskoristimo li disperzijsku relaciju, dobivamo:

$$Yk^2 = Y\left(\frac{\omega}{\sqrt{Y/\rho}}\right)^2 = \omega^2\rho \quad ,$$

pa konačno dobivamo:

$$\vec{u} = \frac{1}{\omega^2\rho}\vec{\nabla} p \quad . \tag{5.24}$$

Zaključujemo da se smjer pomaka iz ravnoteže poklapa sa smjerom gradijenta tlaka.

Dobiveni rezultat uvrštavamo u uvjet za pomake čestica (u x-smjeru) na granici dva valna sredstva (izraz 5.22), pa dobivamo:

$$\frac{1}{\omega^2\rho_1}\left.\frac{\partial p_u}{\partial x}\right|_{x=0} + \frac{1}{\omega^2\rho_1}\left.\frac{\partial p_r}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{1}{\omega^2\rho_2}\left.\frac{\partial p_t}{\partial x}\right|_{x=0} \quad .$$

Kutnu frekvenciju, koja je jednaka u sva tri člana, možemo pokratiti; uvrštavanjem eksplicitnih izraza za tlak (5.18-5.20), dobivamo:

$$\frac{1}{\rho_1}k_x P_u \sin(\omega t - k_z z) + \frac{1}{\rho_1}k_x^r P_r \sin(\omega t - k_z^r z) = \frac{1}{\rho_2}k_x^t P_t \sin\left(\omega t - k_z^t z\right) \quad .$$

Iz prethodnih razmatranja znamo da su fazna kašnjenja $k\Delta z$ jednaka za sva tri vala, što znači da su cijele sinusne funkcije jednake i da ih možemo pokratiti:

$$\frac{1}{\rho_1}k_x P_u + \frac{1}{\rho_1}k_x^r P_r = \frac{1}{\rho_2}k_x^t P_t \quad .$$

Sa slika 5.19 i 5.20 iščitavamo jednostavne trigonometrijske odnose:

$$k_x = -k_x^r = -k\cos\theta_u \quad ,$$

$$k_x^t = k^t\cos\theta_t \quad ,$$

pa dobivamo:

$$(P_u - P_r)\,\frac{k}{\rho_1}\cos\theta_u = P_t\frac{k^t}{\rho_2}\cos\theta_t \quad . \qquad (5.25)$$

Iz disperzijske relacije za prvo sredstvo, $\omega=\sqrt{Y_1/\rho_1}k$, dobivamo:

$$\frac{k}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_1}\cdot\omega\cdot\sqrt{\frac{\rho_1}{Y_1}} = \frac{\omega}{\sqrt{Y_1\rho_1}} = \frac{\omega}{Z_1} \quad .$$

Analogno za drugo valno sredstvo vrijedi:

$$\frac{k}{\rho_2} = \frac{\omega}{\sqrt{Y_2\rho_2}} = \frac{\omega}{Z_2} \quad .$$

Uvrštavanjem u 5.25 dobivamo drugi rubni uvjet na granici dva valna sredstva:

$$(P_u - P_r)\,\frac{\cos\theta_u}{Z_1} = P_t\frac{\cos\theta_2}{Z_2} \quad .$$

Zajedno s trivijalnim prvim uvjetom, izraz 5.21:

$$P_u + P_r = P_t \quad ,$$

dijeljenjem dobivamo:

$$\frac{P_u + P_r}{P_u - P_r}\cdot\frac{Z_1}{\cos\theta_u} = \frac{Z_2}{\cos\theta_t} \quad .$$

Sređivanjem slijedi:

$$P_u\left(\frac{Z_1}{\cos\theta_u} - \frac{Z_2}{\cos\theta_t}\right) = -P_r\left(\frac{Z_1}{\cos\theta_u} + \frac{Z_2}{\cos\theta_t}\right) \quad .$$

Konačno, za koeficijent refleksije dobivamo:

$$R_p = -\frac{\frac{Z_1}{\cos\theta_u} - \frac{Z_2}{\cos\theta_t}}{\frac{Z_1}{\cos\theta_u} + \frac{Z_2}{\cos\theta_t}} \quad ; \qquad (5.26)$$

indeks p podsjeća nas da je ovaj rezultat izračunat preko amplituda tlakova. Dakle, u općenitom slučaju kosog upada *longitudinalnog* vala na graničnu plohu, koeficijent refleksije ovisi o razlici impedancija Z_1 i Z_2, ali i o upadnom kutu θ_u, te s njim povezanim kutom θ_t.

Poseban slučaj okomitog upada (θ_u=0, θ_t=0) odgovara jednodimenzionalnom slučaju, tada dobivamo:

$$R_p = -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad .$$

Uspoređujući ovaj izraz s koeficijentom refleksije izvedenom pri razmatranju valova u jednoj dimenziji (izraz 4.17), uočavamo razliku u predznaku - ona je posljedica činjenice da postoji razlika u fazi između vala tlaka i vala pomaka. Tako npr. pri refleksiji na čvrstom kraju ($Z_2\to\infty$), dobivamo

R_p=1 i na kraju dobivamo trbuh tlaka (P_u+P_r=2P_u), dok ih prethodnog poglavlja znamo da val otklona na čvrstom kraju ima čvor. Na slobodnom kraju imamo ($Z_2\to 0$), imamo obrnutu situaciju, tj. trbuh pomaka i čvor tlaka.

Drugi zanimljiv poseban slučaj je totalna refleksija (θ_t=$\pi/2$). Tada imamo:

$$R_p = -\frac{\frac{Z_1}{\cos\theta_u} - \frac{Z_2}{\cos\theta_t}}{\frac{Z_1}{\cos\theta_u} + \frac{Z_2}{\cos\theta_t}} = -\frac{Z_1\cos\theta_t - Z_2\cos\theta_u}{Z_1\cos\theta_t + Z_2\cos\theta_u} = -\frac{Z_1\cdot 0 - Z_2\cos\theta_u}{Z_1\cdot 0 + Z_2\cos\theta_u} = 1 \quad .$$

Val se u potpunosti reflektira, kao na čvrstom kraju.

Pogledajmo na kraju koeficijent transmisije, T_p. Iz prvog graničnog uvjeta (izraz 5.21) dobivamo:

$$P_t = P_u + P_r = P_u\left(1 + \frac{P_r}{P_u}\right) = P_u(1 + R_p) \quad .$$

Koeficijent transmisije je stoga:

$$T_p = 1 + R_p = \frac{2\frac{Z_2}{\cos\theta_t}}{\frac{Z_1}{\cos\theta_u} + \frac{Z_2}{\cos\theta_t}} \quad . \tag{5.27}$$

Naglasimo još jednom da su svi izrazi izvedeni za jednostavniji slučaj, kada je titranje longitudinalno na smjer širenja vala. Rezultate koje smo dobili usporedit ćemo s analognim rezultatima za svjetlost u zadnjem, devetom poglavlju.

6

Akustika

Zvuk je mehanički val u rasponu frekvencija od 20 Hz do 20 kHz[1] (na koje je osjetljivo ljudsko uho) - čovjek je u stanju registrirati zvuk koji se širi zrakom (ili tekućinom ako mu je uho i njoj), pa ćemo se mi u ovom poglavlju prvenstveno baviti širenjem zvuka kroz plin. Zvuk se u čvrstim tijelima širi i kao transverzalan i kao longitudinalan val - kao što je pokazano u prethodnom poglavlju, brzina širenja zvuka i impedancija valnog sredstva ovise o Youngovom modulu elastičnosti materijala i njegovoj gustoći. U tekućinama i plinovima zvuk se širi samo kao longitudinalni val - njegovim širenjem u materijalu nastaju zgušnjenja i razrijeđenja čestica i odgovarajuća promjena tlaka na koju je osjetljivo uho. Modul elastičnosti tekućine ili plina, a time i način širenja zvuka u njima povezan je stoga s njihovom stlačivosti i u ovom ćemo se poglavlju između ostalog pozabaviti i tom vezom.

6.1 Zvuk kao ravni val u plinu

U prošlom smo poglavlju detaljno promotrili širenje mehaničkih valova u čvrstim tijelima - razmotrimo sada širenje zvuka u plinu. Neka se u dugačkoj cijevi nalazi plin u ravnotežnom stanju; tlak plina je tada jednak u svim njegovim točkama. Pogledajmo jedan sloj plina u poprečnom presjeku cijevi. Okolni slojevi djeluju na taj promatrani sloj zbog tlaka, F=pS. S obje strane odabranog sloja tlak je isti, pa su i sile s lijeva i s desna na dani sloj jednake po iznosu, a suprotnog smjera i sloj kao cjelina miruje.

Ako se u plinu širi val zvuka, tada duž smjera širenjavala nastaju lokalna zgušnjenja i razrijeđenja i pojedini slojevi više nisu u ravnotežnom stanju. Na mjestu gdje je došlo do zgušnjavanja plina, originalni je tlak (p) narasatao i sada iznosi p+Δp. I sila na poprečni presjek tada je veća, ΔF=$S\Delta p$. Porast tlaka je povezan s padom volumena promatranog sloja. Kada bi se stiskanje sloja plina odvijalo sporo, tada bi mogli pretpostaviti da je temperatura njemu konstantna i primijeniti Boyle-Mariotteov zakon (pV=konst.). Međutim, zvuk je brzo titranje, promjene gustoće dešavaju se unutar djelića sekunde i pretpostavka konstantne temperature nije dobra. Pri stiskanju promatrani sloj zraka nema vremena za izmjenu (predaju) topline s okolnim slojevima - promjena stanja plina kod koje se to događa naziva se **adijabatskom** i za nju vrijedi:

$$pV^{\gamma} = \text{konst.} \qquad ,$$

gdje je γ tzv. adijabatski koeficijent. Detalje o adijabatskim procesima učit ćemo na "Općoj fizici 4" - tada ćemo pokazati i da je adijabatski koeficijent za dvoatomne molekule poput O_2 i N_2 (a njih je u zraku najviše) jednak γ=1.4.

[1] Za još više frekvencije, od 20 kHz do 10 MHz, standardno se koristi izraz *ultrazvuk*.

Diferenciranjem gornjeg izraza dobivamo:

$$\mathrm{d}\left(pV^{\gamma}\right) = \mathrm{d}(\text{konst.}) = 0 \quad ,$$

$$\mathrm{d}p \cdot V^{\gamma} + p\left(\gamma V^{\gamma-1}\mathrm{d}V\right) = 0 \quad ,$$

$$\mathrm{d}p + \gamma p \frac{\mathrm{d}V}{V} = 0 \quad .$$

Iskoristimo li vezu dF=SdP, dobivamo:

$$\frac{\mathrm{d}F}{S} = -\gamma p \frac{\mathrm{d}V}{V} \quad .$$

Povećanje tlaka (i odgovarajuće sile) dovodi do pada volumena (to je uzrok minusu u ovom izrazu).

Iz prethodne relacije vidimo da ulogu Youngova modula elastičnosti u plinu "preuzima" veličina γp (usporediti s izrazom 5.9). Uz takvu zamjenu ($Y \rightarrow \gamma p$), disperzijska relacija za longitudinalni val u čvrstom materijalu (izraz 5.10) vodi nas na odgovarajuću relaciju za longitudinalni val u plinu ("zvuk"):

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} k \quad . \tag{6.1}$$

Disperzijska relacija je linearna (kao i uvijek za kontinuum) - koeficijent proporcionalnosti između kutne frekvencije i valnog broja je brzina (grupna i fazna brzina su za linearne disperzijske relacije jednake):

$$v = v_{\phi} = v_g = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad .$$

Za zrak tipične su vrijednosti p= 1013 hPa $\approx 10^5$ N m^{-2} i ρ= 1.29 kg m^{-3}, pa dobivamo:

$$v = \sqrt{\frac{1.4 \cdot 1013 \cdot 10^2}{1.29}} \approx 330 \text{ m/s} \quad .$$

Brzina zvuka u zraku ne ovisi o njegovoj frekvenciji.

Uz zamjenu $Y \rightarrow \gamma p$ krećući od izraza 5.11 možemo napisati i izraz za impedanciju ravnih valova u otvorenom plinu (zraku):

$$Z = \sqrt{\gamma p \rho} \quad . \tag{6.2}$$

U zraku, uz gore popisane vrijednosti za tlak i gustoću, dobivamo:

$$Z = \sqrt{\gamma p \rho} = \sqrt{1.4 \cdot 1013 \cdot 10^2 \cdot 1.29} = 428 \text{ N m}^{-3} \text{ s} \quad .$$

Dobivena je impedancija 4-5 redova veličine manja od vrijednosti dobivene za metale. Vrijednost ze tekućine je između ta dva limesa, npr. za vodu je akustična impedancija jednaka 1.5$\cdot 10^6$ Nm^{-3}s.

6.1.1 Val pomaka i akustički val

Na zvuk koji se širi zrakom možemo primijeniti izraze za val pomaka čestica u kontinuumu; ako se val širi u z-smjeru imali smo (poglavlje 6):

$$u(z,t) = A \sin(\omega t - kz) \quad .$$

Što se tiče tlaka, u plinu i bez uspostave zvučnog vala, postoji ravnotežni atmosferski tlak p. Kada se uspostavi zvučni val, nastaju lokalna zgušnjenja i razrijeđenja, tako da je ukupni tlak:

$$p_{\text{uk}} = p + p_a(z,t) \quad ,$$

gdje odstupanje od ravnotežnog (konstantnog) tlaka p nazivamo **akustički tlak** $p_a(z,t)$.

Budući da val pomaka ima oblik dan gore, za akustički tlak očekujemo:

$$p_a(z,t) = P_a \cos(\omega t - kz) \quad .$$

Usporedbom s izrazom 5.13, te zamjenom $Y \rightarrow \gamma p$ za amplitudu akustičkog tlaka dobivamo:

$$P_a = \gamma p k A \quad . \tag{6.3}$$

Nadalje, želimo povezati intenzitet zvuka s amplitudom akustičkog tlaka. U prethodnom smo poglavlju za intenzitet ravnog vala dobili (izraz 5.15):

$$I = \frac{1}{2}\omega^2 A^2 Z \quad ;$$

ovdje možemo uvrstiti A izražen iz 6.3. da bi dobili:

$$I = \frac{1}{2}\omega^2 \frac{P_a^2}{\gamma^2 p^2 k^2} Z \quad .$$

Iskoristimo li i disperzijsku relaciju 6.1, dobivamo:

$$I = \frac{1}{2}\frac{\gamma p}{\rho}\frac{P_a^2}{\gamma^2 p^2 k^2} Z = \frac{1}{2}\frac{P_a^2}{\rho \gamma p} Z \quad .$$

Iskoristimo li još i izraz 6.2 za impedanciju, konačno dobivamo:

$$I = \frac{P_a^2}{2Z} \quad . \tag{6.4}$$

Kasnije ćemo pokazati da intenzitet zvuka od npr. 1 μW m^{-2} predstavlja za naše uho umjereno jak (glasan) zvuk. Za taj intenzitet po gornjoj relaciji dobivamo: $P_a \approx 3 \cdot 10^{-2}$ N m^{-2} - ovaj je akustički tlak 6-7 redova veličine manji od atmosferskog.

6.2 Sferni valovi zvuka

Ravni val akustičkog tlaka u jednom smjeru (npr. z) dan je s:

$$p_a(z,t) = P_a \cos(\omega t - kz) \quad .$$

Izračunajmo druge parcijalne derivacije akustičkog tlaka po z i po t:

$$\frac{\partial^2 p_a}{\partial z^2} = -k^2 p_a \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = -\omega^2 p_a \quad .$$

Kombiniranjem dobivamo *valne jednadžbu za tlak*:

$$\frac{\partial^2 p_a}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} \quad , \tag{6.5}$$

gdje je v=ω/k.

Ovaj rezultat lako poopćavamo na proizvoljan smjer širenja vala:

$$\frac{\partial^2 p_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_a}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} \quad ,$$

ili u kompaktnijem zapisu:

$$\triangle p_a = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} \quad ,$$

gdje je $\triangle$ oznaka za Laplaceov operator:

$$\triangle = \vec{\nabla}^2 \quad .$$

Izvori zvukova u praksi su najčešće zanemarivih prostornih dimenzija ("točkasti") - zvuk koji oni proizvode širi se koncentrično oko izvora i pokazuje sfernu simetriju. Takav val naziva se "sfernim valom". Valne fronte sfernog vala su sfere s centrom u izvoru vala. Za razmatranje problema sa sfernom simetrijom pogodnije je prijeći iz Kartezijevih koordinata (x,y,z) na sferne (r,θ,ϕ); podsjetimo se da je veza dana s:

$$x = r\sin\theta\cos\phi \quad ,$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi \quad ,$$

$$x = r\cos\theta \quad .$$

U slučaju sfernog vala tlak ne ovisi o koordinatama θ i ϕ, nego samo o udaljenosti r od središta širenja vala (tj. izvora).

Laplaceov operator zapisan općenito u sfernim koordinatama ima sljedeći oblik:

$$\triangle = \vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial^2\phi} \quad .$$

Budući da sferni val ne ovisi o θ i ϕ, drugi i treći član Laplaceovog operatora otpadaju i valna jednadžba postaje:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial p_a}{\partial r}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} \quad .$$

Iz ove valne jednadžbe moramo dobiti rješenje za $p_a(r,t)$ - uz zamjenu Ψ=rp_a, dobivamo:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial(\Psi/r)}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r} - \Psi\right) = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r} + r\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} - \frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} \quad ,$$

pa valna jednadžba poprima jednostavniji oblik:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \quad .$$

Radi matematičke jednostavnosti, rješenje ove jednadžbe dat ćemo u kompleksnom zapisu (imajući na umu da samo realni dio predstavlja fizikalnu veličinu) - gornja diferencijalna jednadžba ima tada rješenje:

$$\Psi(r,t) = Ce^{i(\omega t - kr)}, \quad ,$$

gdje je C neka konstanta. Uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu dobivamo v=ω/k, što odgovara definiciji fazne brzine vala. Dakle, val sfernog akustičkog tlaka ima oblik:

$$p_a(r,t) = \frac{C}{r}e^{i(\omega t - kr)}, \quad . \tag{6.6}$$

Uočavamo da amplituda tlaka kod sfernog vala opada s $1/r$ (tj. P_a=C/r) - to je tako jer intenzitet vala ovisi o P_a^2 i mora se smanjivati s $1/r^2$ jer ukupna energija koja se prenosi kroz sfernu plohu

(površine $4\pi r^2$) mora biti neovisna o udaljenosti r od izvora sfernog vala.

Na kraju petog poglavlja našli smo vezu (izraz 5.24) pomaka čestica iz položaja ravnoteže i gradijenta tlaka (u našem je slučaju relevantan tlak akustički):

$$\vec{u} = \frac{1}{\omega^2\rho}\vec{\nabla}p_a \quad . \tag{6.7}$$

I gradijent trebamo zapisati preko sfernih koordinata:

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \quad ;$$

za sfernosimetričan problem preživljava samo prvi član ovog izraza. Uvrštavanjem izraza 6.6, za gradijent tlaka stoga dobivamo:

$$\vec{\nabla}p_a = \hat{r}\frac{\partial p_a}{\partial r} = \hat{r}\left(-\frac{C}{r^2} - ik\frac{C}{r}\right)e^{i(\omega t-kr)} \quad ,$$

što uvrštavanjem u izraz 6.7 daje:

$$\vec{u} = \hat{r}\frac{1}{\omega^2\rho}\left(-\frac{C}{r^2} - ik\frac{C}{r}\right)e^{i(\omega t-kr)} \quad .$$

Dobili smo, dakle, iznos i smjer pomaka čestica zraka kao funkciju udaljenosti od izvora zvuka. Još će nas zanimati impedancija zvuka - nju (u skladu s razmatranjem u petom poglavlju) nalazimo kao konstantu proporcionalnosti kada (akustički) tlak izrazimo preko brzine čestica zraka (izraz 5.14). Izračunajmo tu brzinu po iznosu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\omega^2\rho}\left(-\frac{C}{r^2} - ik\frac{C}{r}\right)\cdot i\omega e^{i(\omega t-kr)} = \frac{1}{\omega\rho}\left(k\frac{C}{r} - i\frac{C}{r^2}\right)e^{i(\omega t-kr)} = \frac{C}{\rho v}\left(\frac{1}{r} - \frac{i}{kr^2}\right)e^{i(\omega t-kr)} \quad ,$$

gdje smo u zadnjem koraku iskoristili disperzijsku relaciju $\omega{=}vk$.

Sad impedanciju Z_s za širenje sfernog vala uvodimo preko definicijske relacije:

$$p_a = Z_s\frac{\partial u}{\partial t} \quad .$$

Uvrstimo li u ovu relaciju i dobiven izraz za akustički tlak sfernog vala p_a i izraz za odgovarajuću brzinu titranja čestica, dobivamo:

$$\frac{C}{r}e^{i(\omega t-kr)} = Z_s\frac{C}{\rho v}\left(\frac{1}{r} - \frac{i}{kr^2}\right)e^{i(\omega t-kr)} \quad ,$$

$$Z_s = \frac{\rho v}{1-\frac{i}{kr}} \quad .$$

Za impedanciju ravnih valova u otvorenom plinu (zraku) imali smo:

$$Z = \sqrt{\gamma p\rho} = \rho\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \rho v \quad ,$$

pa konačno dobivamo sljedeću vezu između impedancija za sferne i ravne valove:

$$Z_s = \frac{Z}{1-\frac{i}{kr}} \quad .$$

Na velikim udaljenostima od izvora vala vrijedi $kr{\gg}1$ (tj. $r{\gg}\lambda$); tada drugi član u nazivniku postaje zanemariv i vrijedi $Z_s{\approx}Z$. To i očekujemo, jer za veliki r sferni val postaje lokalno jednak

ravnome. Međutim, kada vrijedi $kr<1$, drugi član u nazivniku postaje značajan i impedancija postaje praktično imaginarna. Smisao kompleksne impedancije najlakše je shvatiti ako tlak i brzinu čestica napišemo iz gornjih izraza kao samo realan dio kompleksnih veličina:

$$p_a = \frac{C}{r}\cos(\omega t - kr) \quad ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{C}{\rho v}\left[\frac{1}{r}\cos(\omega t - kr) + \frac{1}{kr^2}\sin(\omega t - kr)\right] \quad .$$

Prvi član u izrazu za brzinu je u fazi s tlakom, dok je drugi član za $\pi/2$ van faze.

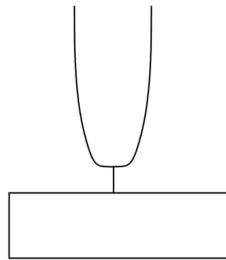
Snaga koji prolazi kroz površinu sfere polumjera r može se naći kao umnožak tlaka i površine (tj. sile), te brzine:

$$P = 4\pi r^2 p\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{4\pi C^2}{\rho v}\left[\cos^2(\omega t - kr) + \frac{1}{kr}\cos(\omega t - kr)\sin(\omega t - kr)\right] \quad .$$

Usrednimo li ovaj izraz po periodu, samo prvi član će pridonositi prijenosu snage. Drugi član, koji dominira za $kr<1$, oscilira frekvencijom 2ω i pri usrednjavanju se gubi - tijekom polovice perioda snaga se predaje valnom sredstvu, dok se tijekom druge polovice vraća natrag. Takvo ponašanje smo sreli i ranije (vidi str. 61) i ono je uvijek odgovaralo kompleksnom dijelu impedancije.

6.3 Glazbena viljuška i glazbeni instrumenti

Glazbena viljuška ja naprava načinjena od elastičnog materijala u obliku slova U. Najčešće se pobuđuje udarom u jedan od dva kraka i tada titra u najnižem modu. Titranje krakova pobuđuje pomake čestica zraka oko njih i nastaje val zvuka u zraku.



Slika 6.1: Glazbena viljuška na rezonantoj šupljini (ormariću).

Glazbenu viljušku možemo pričvrstiti na rezonantnu šupljinu, kao na slici 6.1. Titranje glazbene viljuške prenosi se na stijenku šupljine i zrak u njoj se pobuđuje na titranje (u modu). Na zatvorenom kraju šupljine (koji je čvrst kraj za gibanje čestica zraka), nastaje čvor vala pomaka čestica. Na otvorenom kraju imamo trbuh za pomake čestica zraka (tu pomaci mogu biti najveći) - za valnu duljinu osnovnog moda vrijedit će $L=\lambda/4$, gdje je L duljina šupljine.

Demonstracijski pokus 7.1: titranje glazbene viljuške

Važno uočiti: detekcija putem uha, kuglice obješene na nit i mikrofona spojenog na osciloskop.

Demonstracijski pokus 7.2: prijenos energije putem zraka

Važno uočiti: rezonantno pobuđenje jedne glazbene viljuške titranjem druge.

6.3.1 Glazbeni instrumenti s napetim žicama

Kod glazbala s napetim žicama, titranje se postiže na jedan od tri načina: udarcem mekanim batićem (npr. glasovir), "trzanjem" (npr. gitara) ili povlačenjem gudala (npr. violina). U sva tri slučaja pobuđuje se osnovni mod titranja žice (koje onda uzrokuje titranje okolnog zraka i nastanak zvuka kojeg čujemo), ali uz njega i neki viši harmonici, ovisno o vrsti glazbala. Najšire frekventno područje pokriva glasovir, on se ujedno sastoji od najvećeg broja napetih žica različitih duljina i debljina.

6.3.2 Puhački instrumenti

Kod puhačkih instrumenata na ulaznom se kraju upuhuje zrak. Do pobude titranja i nastanka zvuka dolazi na jedan od sljedeća dva načina:
- nailaskom stuje zraka na **klin** koji dijeli unašnjost instrumenta (npr. orgulja) od vanjskog prostora dolazi do pokretanja čestica zraka u cijevi; u cijevi instrumenta nastaje stojni val čiji detalji ovise o tome je li svirala otvorena ili zatvorena;
- nailaskom stuje zraka na **jezičac** koji koji može zatitrati uspostavlja se rezonancija između titranja (elastičnog) jezičca i stojnog vala u cijevi (npr. klarineta).

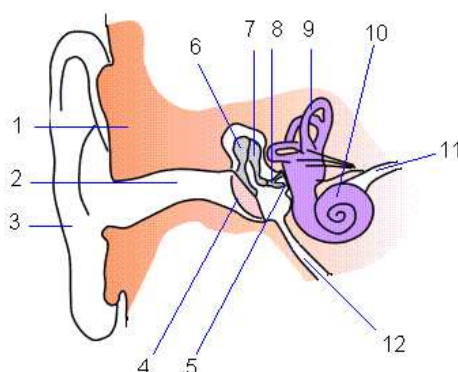
6.3.3 Ljudsko uho

Shematski prikaz ljudskog uha dan je na slici 6.2. Najvažniji dio uha s fizičkog stanovišta je bubnjić koji pod utjecajem zvuka koji dolazi do njega počinje titrati istom frekvencijom. Bubnjić u potpunosti odvaja vanjski dio uha od unutrašnjeg; Eustachijeva cijev služi za to da povremenim otvaranjem izjednačava tlak u srednjem uhu s vanjskim tlakom - ta razlika tlakova nikad ne smije biti prevelika.

Zvuk dolazi do bubnjića kroz ušnu školjku ili ušku. Ušna školjka je takvog oblika da maksimilizira učinkovitost prihvaćanja zvuka (postepenim prilagođavanjem impedancije). Košćice u srednjom uhu (tzv. čekić, nakovanj i stremen) djeluju kao poluga za transformaciju ("prilagodbu") impedancije od bubnjića (u zraku) na ulaznu opnu pužnice (u kojoj je tekućina).
Dakle, bubnjić i košćice djeluju na ulaznu opnu pužnice kao da se ispred nje nalazi ista tekućina. Obrnuto, tekućina iz pužnice djeluje povratno na bubnjić preko košćica kao da se u nastavku bubnjića nalazi zrak u valovodu. Stoga se zvučni val iz zraka kod bubnjića prenese na valu u tekućine pužnice praktički bez refleksije (i do 75% savršenog prijenosa).

Pužnica je, da bude kompaktnija, spiralno namotana (ima oblik puževe kućice, od tud joj i ime), ukupne duljine oko 35 mm. U njoj se nalazi oko 25000 slušnih niti. Najkraća (pri ulazu) ima duljinu oko 0.04 mm, a najdulja (na kraju pužnice) oko 0.5 mm. Osim toga mijenja im se i debljina - najkraće niti su najdeblje i obrnuto. Svaka slušna nit ima svoju rezonantnu frekvenciju (širina koje je određena gušenjem u tekućini).

Val dane frekvencije širi se od ulaza u pužnicu do odgovarajuće slušne niti. Njeno titranje ujedno predstavlja savršeni završetak za dotični val - val se potpuno aprosbira i nema ni refleksije prema



Slika 6.2: Shematski prikaz ljudskog uha. Oznake: 1 - lubanja; 2 - zvukovod; 3 - ušna školjka; 4 - bubnjić; 5 - ovalni prozorčić; 6,7,8 - košćice; 9 - labirint; 10 - pužnica; 11 - zvučni živac; 12 - Eustahijeva tuba.

ulazu u pužnicu ni daljnje transmisije u ostali dio pužnice. Na svakoj se slušnoj niti nalaze još stupići s nosačem za stanice s dlačicama koje podražuju živac.

Uho je najosjetljivije za frekvencije 1-2 kHz; to odgovara rezonanciji slušnih niti po sredini pužnice. Budući da je uho, kao i neka druga osjetila, osjetljivo s logaritamskom ovisnošću (to se naziva Weber-Fechnerovim pravilom), skala po kojoj se u praksi mjeri intenzitet zvuka napravljena je na istom principu. Detaljno ćemo ju diskutirati u sljedećem potpoglavlju.

6.4 Razina buke

Intenzitet vala definirali smo kao prenesenu snagu po jedinici poprečnog presjeka. Razina zvuka ili razina buke (*engl.* noise level) L nekog zvuka intenziteta I dogovorno se definira kao:

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad , \tag{6.8}$$

gdje je I_0 referentni intenzitet jednak:

$$I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2} \quad .$$

Za razinu zvuka izračunatu na ovaj način kaže se da je dana u decibelima (oznaka “dB”)[2]. Odabrani referentni intenzitet zvuka I_0 otprilike odgovara pragu čujnosti na frekvenciji 1-2 kHz. Primjeri nekih drugih razina zvuka dani su u tablici 6.1.

Pogledajmo koje amplitude pomaka čestica A i akustičkog tlaka P_a odgovaraju nekim od primjera iz tablice 6.1. Upotrijebit ćemo prije izvedene izraze (npr. 6.4):

$$I = \frac{1}{2}\omega^2 A^2 Z \qquad \rightarrow \qquad A = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2I}{Z}} \quad ,$$

$$I = \frac{P_a^2}{2Z} \qquad \rightarrow \qquad P_a = \sqrt{2IZ} \quad .$$

[2]Pojam “decibel” nije nužno vezan za zvuk, već je riječ o logaritamskoj jedinici koja se često koristi pri izražavanju omjera dvaju snaga ili intenziteta, u raznim fizičkim situacijama (uključujući npr. gušenje nekog signala). Sama jedinica duguje ime Alexandru Grahamu Bellu (1847-1922), škotskom znanstveniku i izumitelju koji je napravio prvu upotrebljivu verziju telefona.

primjer	razina buke L
osjetljivost najboljih mikrofona	-80 dB
prag čujnosti	0 dB
lagano šuštanje lišća	10 dB
šapat	40 dB
normalan govor	50 dB
bučna ulica	60-70 dB
mikser	65 dB
diskoklub	115 dB
granica bola	120 dB
vuvuzele na 1 m udaljenosti	120 dB
mlažnjak na 100 m udaljenosti	120 dB
prednji redovi rock-koncerata	130 dB
zvuk kod kojeg puca staklo	160 dB
nuklearne bombe	280 dB
najjače vulkanske erupcije	320 dB

Tablica 6.1: Razina zvuka (buke) u raznim situacijama.

Impedanciju Z nalazimo iz izraza 6.2.

Na granici čujnosti (za frekvenciju 1 kHz) imamo:

$$L = 0 \text{ dB} \qquad \rightarrow \qquad I = I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \quad ,$$

$$A = 0.1 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 10 \text{ pm} \quad ,$$

$$P_a = 3 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \quad .$$

Dakle, pomaci čestica (molekula) zraka su za najmanje red veličine manji od dimenzija atoma.

Na granici bola za uho, analogno nalazimo:

$$L = 120 \text{ dB} \qquad \rightarrow \qquad I = 10^{12} I_0 = 1 \text{ W/m}^2 \quad ,$$

$$A = 10^{-15} \text{ m} = 10 \; \mu\text{m} \quad ,$$

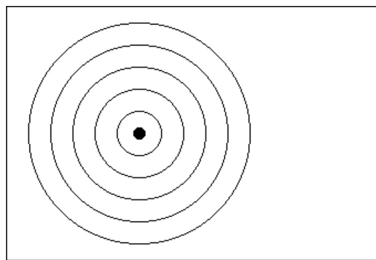
$$P_a = 30 \text{ N/m}^2 = 30 \text{ Pa} \quad .$$

Pomaci su bitno veći od dimenzija atoma, na amplituda akustičkog tlaka još uvijek je puno manja od atmosferskog.

6.5 Dopplerov efekt

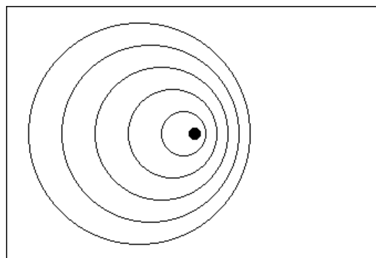
Dopplerov efekt je pojava da promatrač opaža drukčiju frekvenciju nekog vala (npr. zvuka) od frekvencije koju emitira izvor, ako među njima postoji relativno gibanje (dakle, ako se giba ili izvor ili promatrač ili oboje). Pogledajmo Dopplerov efekt na primjeru izvora koji se giba i mirujućeg promatrača.

Neka je izvor zanemarive dimenzije (točkast) - klasičan primjer je sirena policijskog auta. Dok auto miruje u odnosu na medij koji prenosi zvuk (dakle, zrak), valne fronte zvuka sirene su pravilne sfere, kao na slici 6.3.



Slika 6.3: Dopplerov efekt: valne fronte izvora koji miruje.

Ako se izvor počne gibati brzinom v_i u nekom smjeru, unutar jednog perioda T_i preći će udaljenost v_iT_i i svaka sljedeća valna fronta bit će emitirana iz položaja koji je za toliko pomaknut u odnosu na prethodni. Na slici 6.4 dane su valne fronte za izvor koji se pomiče prema desno. Očito je da će promatrač (zapravo, "slušatelj") koji se nalazi u smjeru gibanja izvora češće uočavati valne fronte nego što bi to bio slučaj za mirujući izvor. Obrnuto vrijedi za promatrača koji bi se nalazio na slici 6.4 lijevo, u smjeru suprotnom od smjera gibanja izvora.



Slika 6.4: Dopplerov efekt: valne fronte izvora koji se giba udesno.

Izračunajmo vrijeme između dolaska dvije valne fronte do promatrača koji se nalazi u smjeru gibanja izvora. Vrijeme između dvije fronte (tj. period titranja izvora) T_i trebamo umanjiti za efekt skraćivanja udaljenosti koju zvuk prelazi - ta udaljenost je gore spomenutih v_iT_i. Dakle, zvuk putuje kraći put do promatrača, a tom skračivanju udaljenosti odgovara skračivanje vremena jednako v_iT_i/v, gdje je v brzina širenja zvuka kroz zrak. Vrijeme koje opaža promatrač između dolaska dvije valne fronte jednako je, dakle:

$$T_o = T_i - \frac{v_iT_i}{v} = T_i\frac{v - v_i}{v} \quad .$$

Zapišimo ovo preko frekvencija vala pri emisiji i opažanju:

$$f_o = f_i\frac{v}{v - v_i} \quad .$$

Kada nam se auto sa sirenom približava, čujemo višu frekvenciju dok nam se on približava - u trenutku kada auto prođe kraj nas i počne se udaljavati, frekvencija zvuka postaje niža.

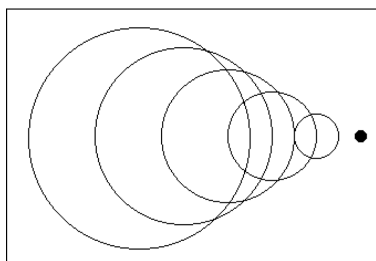
Analogno se razmatranje može napraviti i za situaciju kada se giba promatrač; izraz koji uključuje oba efekta naziva se Dopplerova formula i dan je sa:

$$f_o = f_i\frac{v + v_o}{v - v_i} \quad . \tag{6.9}$$

Brzine izvora (v_i) i promatrača (v_o) u ovom se izrazu uzimaju pozitivnim ako se isti približavaju, a negativnim ako se udaljavaju.

Dopplerov efekt nije ograničen na zvuk, već se pojavljuje kod svih vrsta valova. Ako se valovi prenose nekim medijem (zrakom u slučaju zvuka), Dopplerov effekt uvijek opisujemo izrazom 6.9 - ako je, pak, riječ o valovima koji ne trebaju medij za širenje prostorom (svjetlost!), onda je matematički zapis Dopplerovog efekta drukčiji (i bit će dan u osmom poglavlju).

Nadalje, Dopplerov efekt za koji smo ovdje izveli jednostavan izraz pretpostavljao je da se sve dešava u jednoj dimenziji (promatrač se nalazi na liniji gibanja izvora) - kada tome nije slučaj, izvod i konačan rezultat se bitno kompliciraju zbog geometrijskih efekata.



Slika 6.5: Dopplerov efekt: valne fronte izvora koji se giba udesno brzinom većom od brzine širenja valova.

Komentirajmo još na kraju što bi se desilo kada bi se izvor gibao brzinom većom od brzine vala (zvuka) u mediju kojim se kreće. Takva je situacija predočena na slici 6.5. Valne fronte se sada sijeku i dolazi do pojave interferencije. Kada je brzina izvora samo malo veća od brzine širenja vala, tada interferencijom dobivamo vrlo intenzivan (pojačan) ukupan val - u primjeru zvuka riječ je o "probijanju zvučnog zida" (*engl.* sonic boom) do kojeg dolazi npr. kod ubrzavanja nadzvučnih aviona. Razina buke pri samom probijanju zvučnog zida na par metara udaljenosti iznosi oko 200 dB. Ova pojava se općenito naziva "šok-val" (*engl.* shock wave), i osim za zvuk primijećena je za mnoge druge vrste valova.

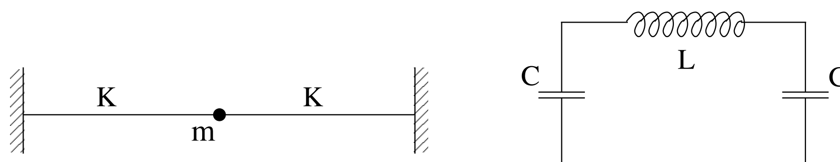
7

Titranja i valovi u električnim sustavima

Titranje u električnim sustavima od iznimne je važnosti i s konceptualnog stanovišta, i s aspekta primjene. Veličine koje pokazuju oscilatorno ponašanje su naboj, struja, napon, električno polje itd. Njihovo ćemo razmatranje započeti povlačeći paralelu s mehaničkim titranjem (zbog diferencijalnih jednadžbi istog oblika), da bi na kraju naglasili specifičnosti električnih sustava[1]. I jedno i drugo će poslužiti kao uvod u preostala dva poglavlja: elektromagnetske valove i optiku.

7.1 Analogija električnog i mehaničkog oscilatora

Nađimo vezu između mehaničkih i električnih sustava na najjednostavnijem mogućem primjeru. Neka se mehanički oscilator sastoji od čestice i dvaju opruga, a električni oscilator od zavojnice i dvaju kondenzatora. Ravnotežno stanje (slika 7.1) je ono kod kojeg nema otklona mase na oprugama (u=0), odnosno nema naboja na kondenzatorima (Q=0).

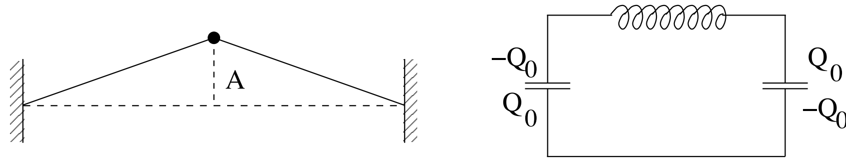


Slika 7.1: Analogija električnog i mehaničkog oscilatora: ravnotežno stanje.

Zamislimo sada da vanjskim utjecajem u trenutku t=0 otklonimo ove sisteme iz ravnoteže, kao na slici 7.2. Masa mehaničkog oscilatora otklonjena je iz ravnotežnog položaja za u=A, dok je električni sustav iz ravnoteže izmaknut dovođenjem naboja $+Q_0$ i $-Q_0$ na ploče oba kondenzatora. Kondenzatori moraju biti nabijeni kao na slici 7.2 jer je ukupan naboj u gornjoj polovici sustava (fizički odvojenoj u kondenzatorima od donje) jednak nuli; isto vrijedi i za donju polovicu.

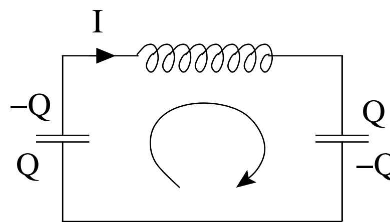
Nakon početno uspostavljenog stanja pustimo svaki od sustava da slobodno titra. Znamo da će se čestica mase m sinusoidalno gibati između maksimalnih otklona A i $-A$; pokazat ćemo da slično vrijedi i za količinu naboja Q na pločama kondenzatora: ona će oscilirati između ekstremnih vrijednosti Q_0 i $-Q_0$ (i pri tome će kroz zavojnicu teči struja $I(t)$=dQ/dt).

[1]U berkeleyskom udžbeniku razmatranje električnih sustava nije napravljeno u zasebnom poglavlju, već je razbacano po više njih. Mi ćemo ovdje pokriti posve isto gradivo, no "stavljanjem pod isti naslov" dobit ćemo na sistematičnosti i jasnoći izlaganja.



Slika 7.2: Analogija električnog i mehaničkog oscilatora: početni otklon.

Da bismo dobili diferencijalnu jednadžbu koja će opisati električni strujni krug na slici 7.2, krećemo od drugog Kirchoffovog zakona - odaberimo smjer obilaženja strujne petlje kao na slici 7.3. Neka je u nekom trenutku naboj na pločama po iznosu jednak Q (Q<Q_0), s predznacima kao na slici 7.3.



Slika 7.3: Primjena drugog Kirchoffovog zakona na strujnu petlju sa slika 7.1 i 7.2.

Pri obilaženju petlje, na kondenzatorima će potencijal padati ako prelazimo s ploče s pozitivnim nabojem na ploču s negativnim. Za odabrani smjer obilaženja petlje, na oba se kondenzatora dešava upravo to, pa napon među pločama (po iznosu Q/C) u raspis drugog Kirchoffovog zakona ulazi s negativnim predznakom. Struja $I(t)$=dQ/dt teči će kroz zavojnicu u smjeru porasta naboja Q; dakle, prema desno na slici 7.3. Na krajevima zavojnice inducira se napon jednak $-L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$, pa je suma padova napona po strujnoj petlji jednaka:

$$-\frac{Q}{C} - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - \frac{Q}{C} \quad .$$

Budući da u ovom strujnom krugu nema elektromotornih sila, po drugom Kirchoffovom zakonu ovu silu izjednačavamo s nulom, pa dobivamo:

$$-\frac{2Q}{C} - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0 \quad .$$

Uz $I(t)$=dQ/dt, ovo daje:

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{2}{C}Q \quad ,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2}{LC}Q = 0 \quad .$$

Ova diferencijalna jednadžba je po obliku identična onoj koju smo dobili za mehanički oscilator. Pretpostavimo li početne uvjete (npr. kao što je prije spomenuto: Q=Q_0 u t=t_0), možemo odmah napisati i njeno rješenje:

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t) \quad ,$$

gdje je vlastita (kutna) frekvencija titranja ω_0 danog električncnog titrajnog kruga jednaka:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}} \quad .$$

Za struju nalazimo rješenje:

$$I(t)=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t)=I_0\sin(\omega_0 t) \quad .$$

mehaničke	električne
$u(t)$	$Q(t)$
m	L
K	$1/C$
$F{=}-Ku$	$V{=}-Q/C$
$v{=}\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$	$I{=}\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$

Tablica 7.1: Analogne veličine u mehaničkim i električnim oscilatornim sustavima.

Na ovom primjeru usporedbom mehaničkog i električnog sustava i odgovarajućih diferencijalnih jednadžbi, nalazimo analogne veličine - popis istih je dan u tablici 7.1. Veličina koja oscilira (analogon pomaka iz ravnoteže u) je, dakako, naboj Q. U strujnom krugu induktivitet L igra ulogu "inercije" (mase m u mehaničkom sustavu), a inverz kapaciteta $1/C$ ulogu konstante elastičnosti. Ova posljednja analogija je i najmanje očita, no postaje jasnija pogledamo li sljedeći redak tablice 7.1: ulogu "povratna sile" u elaktričnoj varijanti igra stvoren napon na pločama kondenzatora - što je za dani naboj Q kapacitet *manji*, napon na pločama bit će veći i pražnjenje kondenzatora dešavat će se brže. U nastavku ćemo analogone iz tablice 7.1 pokušat iskoristiti za razmatranje kompliciranijih sustava.

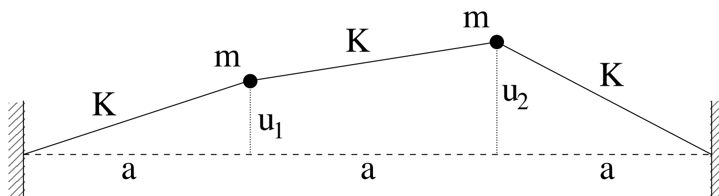
7.2 Sustavi s dva i više normalnih modova titranja

7.2.1 Sustav s dva moda

Najjednostavniji mehanički sustav, kod kojeg su se pojavljivali netrivijalni modovi (onaj koji se sastojao od dva tijela) obrađen je na stranicima 14-21; ponovimo ovdje samo glavne crte izvoda. Sistem u nekom općenitom stanju dan je na slici 7.4; za njegove jednadžbe gibanja (u aproksimaciji jako istegnutih opruga) dobili smo:

$$m\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2}=-Ku_1-K\left(2u_1-u_2\right)=-K\left(2u_1-u_2\right) \quad ,$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2}-K\left(2u_2-u_1\right)-Ku_2=-K\left(2u_2-u_1\right) \quad .$$

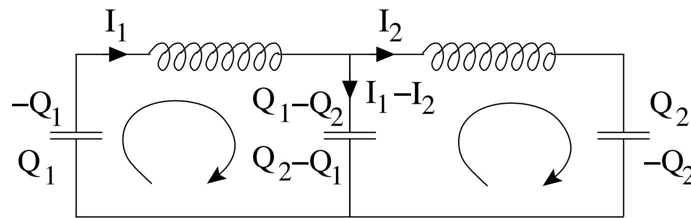


Slika 7.4: Transverzalno titranje sustava dvije jednake čestice vezane oprugama.

Kao rješenje dobili smo dva moda titranja:
1. mod: vrijedi $u_1(t){=}u_2(t)$, čestice titraju frekvencijom $\omega^{(1)}=\sqrt{K/m}$;

2. mod: vrijedi $u_1(t)$=$-u_2(t)$, čestice titraju frekvencijom $\omega^{(2)} = \sqrt{3K/m}$.
Vizualizacija tih modova dana je na slici 1.12.

Probajmo konstruirati analogan električni sustav. Budući da su zavojnice analogoni mase, moramo ih imati dvije. Iz istog razloga u sustavu ćemo imati tri kondenzatora (koji su analogni oprugama). Sistem treba biti konstruiran tako da vodi na dvije diferencijalne jednadžbe. Drugi Kirchoffov zakon nam, pak, daje samo jednu jednadžbu za jednu zatvorenu strujnu petlju; iz toga zaključujemo da se sistem koji konstruiramo mora sastojati od najmanje dvije strujne petlje. Probajmo vidjeti da li sustav dan na slici 7.5 vodi na diferencijalne jednadžbe analogne gornjima za promatrani mehanički sustav.



Slika 7.5: Električni sustav s dva moda titranja.

Na krajnjem lijevom kondenzatoru i na krajnjem desnom kondenzatoru pretpostavljeni su predznaci trenutačnih naboja kao u jednostavnijem sustavu (slike 7.1 i 7.2); naboji na pločama srednjeg kondenzatora izračunati su tada iz zakona sačuvanja naboja (isto vrijedi i za struju kroz srednju granu). Primijenimo drugi Kirchoffov zakon na svaku od strujnih petlji (uz smjer obilaženja petlji kao na slici 7.5):

$$-\frac{Q_1}{C} - L\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - \frac{Q_1 - Q_2}{C} = 0 \quad ,$$

$$\frac{Q_1 - Q_2}{C} - L\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} - \frac{Q_2}{C} = 0 \quad .$$

Uzimajući u obzir:

$$I_1 = \frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}t} \qquad \mathrm{i} \qquad I_2 = \frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}t} \quad ,$$

dobivamo:

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q_1}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{C}\left(2Q_1 - Q_2\right) \quad ,$$

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q_2}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{C}\left(2Q_2 - Q_1\right) \quad .$$

Dobivene su jednadžbe po obliku identične onima za mehanički sustav. Stoga možemo odmah i "preslikati" zaključke. Kao prvo, sustav na slici 7.5 ima dva normalna moda titranja u kojima naboji na *svim* kondenzatorima titraju sinusoidalno s *istim* frekvencijama. Pogledajmo detalje svakog od modova.

1. mod: u najnižem modu vrijedi:

$$Q_1(t) = Q_2(t) = Q_0 \cos\left(\omega^{(1)}t\right) \quad .$$

To povlači:

$$I_1(t) = I_2(t) = I_0 \sin\left(\omega^{(1)}t\right) \quad .$$

Frekvencija kojom naboji i struje mijenjaju iznos (i predznak) dana je s:

$$\omega^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad .$$

U ovom modu titranja, kroz srednju granu sklopa na slici 7.5 *ne teče struja* ($I_1-I_2=0$), pa se srednji kondenzator niti ne nabija, niti prazni ($Q_1-Q_2=0$). Ovakvo ponašanje je, dakako, ekvivalentno onome kod mehaničkog sustava u kojemu se srednja opruga ne rasteže pri titranju u prvom modu. Dakle, titranje prvog moda u električnom sustavu svodi se na nabijanje i izbijanje krajnjih kondenzatora pomoću izmjeničnih struja.

2. mod: u ovom modu vrijedi:

$$Q_1(t) = -Q_2(t) = Q_0 \cos(\omega^{(2)} t) \quad ,$$

što povlači:

$$I_1(t) = -I_2(t) = I_0 \sin(\omega^{(2)} t) \quad .$$

Frekvencija titranja u drugom modu električnog sustava sa slike 7.5 dana je s:

$$\omega^{(2)} = \sqrt{\frac{3}{LC}} \quad .$$

Središnjom granom u ovom modu teče struja:

$$I_1 - I_2 = 2I_0 \sin(\omega^{(2)} t) \quad ,$$

a naboj na središnjem kondenzatoru dan je s:

$$Q_1 - Q_2 = 2Q_0 \cos(\omega^{(2)} t) \quad .$$

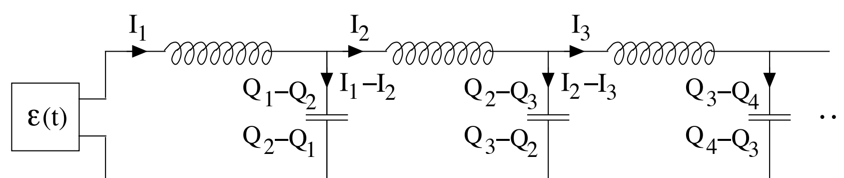
Ponašanje je analogno onome koje imamo kod mehaničkog sustava u drugom modu titranja, kod kojeg se središnja opruga rasteže dvostruko više nego krajnje.

7.2.2 Sustav s više modova titranja

Električni sustav s više modova titranja konstruiramo daljnjim dodavanjem po jedne zavojnice i kondenzatora u paralelu sklopu danom na slici 7.5 - analogija takvih sustava s mehaničkim je potpuna i dobivaju se modovi titranja poput diskutiranih u prvom poglavlju. Dakle, razmatranje ovakvih sustava ne vodi nas na ništa novo - sve bitno je diskutirano u mehaničkom slučaju. Ekvivalentne beskonačne sustave razmatrat ćemo u kontekstu širenja valova u sljedećem potpoglavlju.

7.3 Putujući val u beskonačnom električnom sustavu

Razmotrimo polubeskonačnu varijantu sustava sa slika 7.1, 7.2 i 7.5. Stavimo na njegov (jedini) kraj izvor elektromotorne sile $\mathcal{E}(t)$ i frekvencije ω, kao na slici 7.6 - u drugom smjeru sustav neka bude beskonačan.



Slika 7.6: Širenje vala u električnom sustavu.

U mehaničkom smo slučaju analogan sistem diskutirali razmatanjem pomaka $u_i(t)$; u električnoj varijanti prirodno je razmatranje struje $I_i(t)$ u svakoj od zavojnica (što odgovara razmatranju brzine v_i u mehaničkom analogonu). Po analogiji s mehaničkim sustavom (vidi str. 76-79), dobivamo:

$$I_i(t) = I_0 \sin(\omega t - i\Delta\phi) \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots$$

Struja u svakoj zavojnici titra istom frekvencijom ω koju nameće izvor, te istom amplitudom I_0, ali kasni u fazi za strujom u prethodnoj zavojnici za neki iznos $\Delta\phi$. Ta pojava naziva se **strujni val**. Širenje strujnog vala u električnom sustavu odvija se u potpunoj analogiji s valom u mehaničkom sustavu.

Važno je ipak uočiti jednu bitnu razliku mehaničkog i električnog sustava. U mehaničkom je sustavu njegova geometrija prirodno ulazila u jednadžbe preko duljine opruga i razmaka susjednih čestica. Bilo je moguće definirati valnu duljinu λ i odgovarajući valni broj k. U električnom sustavu razmak između zavojnica ili kondenzatora je nevežan, pa valna duljina kao koncept nema smisla (isto vrijedi i za valni broj). Fizikalno je važno jedino kašnjenje $\Delta\phi$ između stanja u susjednim zavojnicama (ili kondenzatorima).

Kakve su posljedice ove konceptualne razlike na disperzijsku relaciju? Disperzijska relacija za električni sustav i dalje ima isti oblik kao i ona za mehanički sustav, jedino što kašnjenje ka u mehaničkoj varijanti, sada moramo pisati općenito kao $\Delta\phi$. Dakle, disperzijska relacija izgleda ovako:

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{LC}} \sin\frac{\Delta\phi}{2} \quad . \tag{7.1}$$

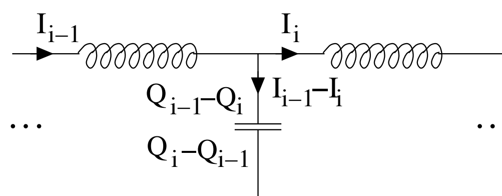
Za kašnjenje $\Delta\phi$ općenito mora vrijediti:

$$0 < \Delta\phi < \pi \quad .$$

U praksi, za dani sustav (definirane vrijednosti L i C) frekvencija izvora ω elektromotorne sile određuje (preko disperzijske relacije) kašnjenje struja u uzastopnim zavojnicama. Ako je frekvencija izvora ω veća od maksimalne moguće frekvencije danog sistima, $\omega_{\max}=\sqrt{4/LC}$, onda neće doći do širenja vala kroz sustav - struje u uzastopnim zavojnicama imat će tada eksponencijalno padajuće amplitude (analogno mehaničkom sustavu, vidi str. 82-86).

7.3.1 Impedancija električnog sustava

Kod mehaničkog sustava impedanciju smo uveli proučavajući odnos između sile koja tjera val od čestice do čestice i pomaka pojedine čestice. U skladu s analogijama danim u tablici 7.1, kod električnog će nam se sustava impedancija pojaviti pri razmatranju odnosa između napona na nekom kondenzatoru (analogon sile) i struje u sljedećoj zavojnici (analogon brzine), od koje se onda dalje širi strujni val. Pogledajmo stoga jedan segment beskonačnog električnog sustava, dan na slici 7.7.



Slika 7.7: Segment polubeskonačnog električnog sustava sa slike 7.6.

Napon na i-tom kondenzatoru dan je s:

$$U_i = \frac{Q_{i-1} - Q_i}{C} \quad .$$

Doprinosi Q_i i Q_{i-1} naboju na kondenzatoru nastaju uslijed odgovarajućih struja kojima se kondenzator nabija ili izbija:

$$I_{i-1} = \frac{\mathrm{d}Q_{i-1}}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad Q_{i-1} = \int I_{i-1}\mathrm{d}t \quad ,$$

$$I_i = \frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad Q_i = \int I_i\mathrm{d}t \quad .$$

Prema tome, napon na i-tom kondenzatoru sa strujom možemo povezati pomoću ovog izraza:

$$U_i = \frac{1}{C}\int (I_{i-1} - I_i)\mathrm{d}t \quad .$$

U analogiji s mehaničkim sustavom (vidi str. 90), zbog fazne razlike između uzastopnih struja, razliku struja u gornjem izrazu možemo izraziti pomoću jedne struje i faznog pomaka:

$$\begin{aligned} I_{i-1} - I_i &= I\{\sin[\omega t - (i-1)\Delta\phi] - \sin[\omega t - i\Delta\phi]\} = \\ &= -[1-\cos(\Delta\phi)]I\sin(\omega t - i\Delta\phi) + \sin(\Delta\phi)I\cos(\omega t - i\Delta\phi) = \\ &= -[1-\cos(\Delta\phi)]I_i + \frac{\sin(\Delta\phi)}{\omega}\frac{\mathrm{d}I_i}{\mathrm{d}t} \quad . \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u izraz za U_i konačno dobivamo:

$$U_i = -\frac{1}{C}[1-\cos(\Delta\phi)]\int I_i\mathrm{d}t + \frac{\sin(\Delta\phi)}{\omega C}I_i \quad .$$

Sljedeći logiku mehaničkog sustava, veličinu koja množi naboj (integral struje) nazvat ćemo disperzijskom impedancijom:

$$Z_d = -\frac{1}{C}[1-\cos(\Delta\phi)] \quad .$$

a veličinu koja množi derivaciju naboja (struju) nazvat ćemo apsorpcijskom impedancijom:

$$Z_a = \frac{\sin(\Delta\phi)}{\omega C} \quad ;$$

uz takve definicije za napon na kondenzatoru U_i imamo:

$$U_i = Z_d\int I_i\mathrm{d}t + Z_aI_i \quad .$$

Analogija s mehaničkim sustavom je potpuna.

7.3.2 Aproksimacija kontinuuma

Od praktičkog je interesa razmotriti slučaj vrlo malenog kašnjenja struje u nekoj zavojnici, u odnosu na struju u prethodnoj zavojnici ($\Delta\phi \ll 1$). U tom limesu imamo velik broj zavojnica sa strujom fazno raspodijeljenom unutar jednog perioda od 2π. Za impedancije tada imamo:

$$Z_d = -\frac{1}{C}[1-\cos(\Delta\phi)] = -\frac{1}{C}(1-1) = 0 \quad ;$$

$$Z_a = \frac{\sin(\Delta\phi)}{\omega C} \approx \frac{\Delta\phi}{\omega C} \quad .$$

U limesu kontinuuma disperzijska impedancija nestaje pa su napon V_i (na i-tom kondenzatoru) i struja I_i (kroz i-tu zavojnicu) u fazi. Na prvi pogled, uzimajući u obzir vezu $I{=}\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$, ovo može izgledati kontradiktorno, no treba se sjetiti da i-ti kondenzator nabijaju i izbijaju dvije struje (vidi sliku 7.7). Budući da disperzijska impedancija nestaje, za apsorpcijsku impedanciju u aproksimaciji kontinuuma uvodimo oznaku bez indeksa "a":

$$Z = Z_a = \frac{\Delta\phi}{\omega C} \quad .$$

Napišimo sada disperzijsku relaciju 7.1 u limesu $\Delta\phi \ll 1$:

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{LC}} \sin\frac{\Delta\phi}{2} \approx \sqrt{\frac{4}{LC}}\frac{\Delta\phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\Delta\phi \quad .$$

Izrazimo li iz ove disperzijske relacije kašnjenje u fazi $\Delta\phi$ i uvrstimo li ga u izraz za impedanciju, dobivamo:

$$Z = \frac{\Delta\phi}{\omega C} = \frac{\sqrt{LC}\omega}{\omega C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad . \tag{7.2}$$

Kao što smo već pokazali, u limesu $\Delta\phi \ll 1$ vrijedi dakle:

$$U_i = ZI_i \quad .$$

Mjerna jedinica za impedanciju Z očito je (1 Volt)/(1 Amper)= 1 Ohm (Ω). Identičnost mjerne jedinice za impedanciju s onom za električni otpor, *ne znači* da pri širenju strujnog vala dolazi do pretvorbe električne snage u toplinu, već jednostavno to da se snaga prenosi putem strujnog vala duž električnog valnog sredstva.

Treba naglasiti da u promatrani električni sustav nismo uključili otpor žica - njega smo u ovom idealiziranom razmatranju zanemarili. Impedancija koju smo dobili za promatrani sustav jednostavno nam govori da je za tjeranje strujnog vala u njemu, i bez prisustva električnog otpora, potreban neki napon.

U idealiziranom beskonačnom valnom sredstvu snaga koja se prenosi valom odlazi u beskonačnost. Ako na nekom mjestu prekinemo valno sredstvo i završimo ga (omskim) otpornikom, u slučaju da je otpor otpornika jednak impedanciji valnog sredstva ($R{=}Z$), u njemu će se snaga u potpunosti apsorbirati (i govorit ćemo o "savršenom završetku"). Ako je završetak nesavršen, na njemu će doći do (djelomične) refleksije strujnog vala (kao i u mehaničkom slučaju).

7.3.3 Filteri

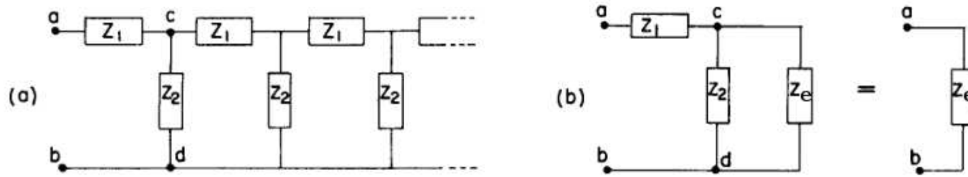
Odgovara li impedancija iz izraza 7.2 impedanciji koju smo definirali u "Općoj fizici 2"? Pokušajmo dobiti isti rezultat krećući od pravila naučenih na "Općoj fizici 2". Razmotrimo u tu svrhu beskonačnu mrežu električnih elemenata, kao na slici 7.8, lijevo. Impedancije Z_1 i Z_2 neka za sada budu posve općenite, kasnije ćemo ih uskladiti sa slikom 7.6. Nađimo ekvivalentnu impedanciju između točaka **a** i **b** na slici.

Beskonačnu mrežu rješavamo tako da iz nje eksplicitno izdvojimo jedan njen ponavljajući uzorak - ono što ostaje je opet beskonačna mreža (odvajanje konačnog broja uzoraka ne umanjuje beskonačnost ostatka), kao što je pokazano na slici 7.8, desno. Dakle, za ekvivalentnu impedanciju imamo:

$$Z_e = Z_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_e}} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_e}{Z_2 + Z_e} \quad ,$$

odakle raspisujemo:

$$Z_e Z_2 + Z_e^2 = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_e + Z_2 Z_e \quad ,$$



Slika 7.8: Beskonačna mreža impedancija, te način dolaženja do njene ekvivalentne impedancije.

$$Z_e^2 - Z_1 Z_e - Z_1 Z_2 = 0 \quad .$$

Dobili smo kvadratnu jednadžbu za Z_e, njena su rješenja:

$$Z_e = \frac{Z_1 \pm \sqrt{Z_1^2 + 4Z_1Z_2}}{2} \quad .$$

Općenito dozvoljavamo da impedancija bude kompleksna - ono što nam nije prihvatljivo je realna impedancija koja je negativna (to bi odgovaralo situaciji u kojoj struja samo pod utjecajem napona teče od točke nižeg k točki višeg potencijala), pa od gornja dva rješenja biramo ono kojim izbjegavamo takvu mogućnost:

$$Z_e = \frac{Z_1}{2} + \sqrt{Z_1^2/4 + Z_1Z_2} \quad . \tag{7.3}$$

Uvrstimo u ovo općenito rješenje specijalan slučaj sa slike 7.6; tada vrijedi:

$$Z_1 = i\omega L \quad , \quad Z_2 = \frac{1}{i\omega C} \quad ,$$

pa je ekvivalentna impedancija dana s:

$$Z_e = \frac{i\omega L}{2} + \sqrt{L/C - \omega^2 L^2/4} \quad . \tag{7.4}$$

Pogledajmo prvo ovaj rezultat u limesu kontinuma. Tada su struje u susjednim zavojnicama skoro u fazi, tj. vrijedi $\Delta\phi \ll 1$. Iz disperzijske relacije (izraz 7.1) vidimo da je tada nužno:

$$\omega \ll \sqrt{\frac{4}{LC}} \quad ,$$

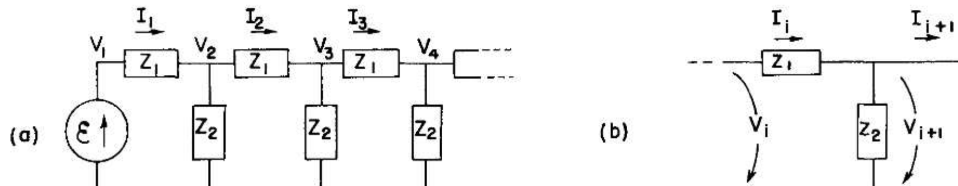
pa u izrazu 7.4 za ekvivalentnu impedanciju preživljava samo član koji ne uključuje frekvenciju ω:

$$Z_e = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad .$$

Ovo je posve identično rezultatu 7.2 koji smo dobili razmatranjem u okviru formalizma razvijenog na "Općoj fizici 3" - koncept impedancije posve je usklađen u dva naizgled odvojena područja fizike. Isto bi se dobilo i za beskonačne mreže sagrađene od drugačijih (kompliciranijih) uzoraka.

Postavimo još jedno važno pitanje: kako je moguće da kombiniranjem induktiviteta i kapaciteta (kojima odgovaraju imaginarne impedancije) dobijemo posve realnu ekvivalentnu impedanciju? Budući da realnoj impedanciji odgovara apsorpciji energije, gdje se ta energija apsorbira (kada se energija ne troši ni na zavojnici ni na kondenzatoru)? Odgovor leži u činjenici da je promatrani sustav beskonačan: energija putuje sustavom i da bi situacija bila stacionarna, izvor uvijek treba "pumpati" dodatnu energiju u njega - to se, dakako, reflektira u realnoj impedanciji. Dakle, ta je pojava direktno vezana na beskonačnost razmatranog sistema.

Za sada smo promotrili slučaj vrlo malenih frekvencija - pogledajmo sada što se dešava s izrazom 7.4 povećavanjem frekvencije. Počnimo opet od općenite beskonačne mreže impedancija, koja se napaja nekom oscilirajućom elektromotornom silom $\mathcal{E}$, kao na slici 7.9, lijevo. Označimo potencijale V_i kao na slici i fokusirajmo se na i-tu impedanciju Z_1.



Slika 7.9: Beskonačna mreža impedancija: propagacija napona.

Struja koja prolazi kroz zavojnicu uzrokovana je razlikom potencijala na njenim rubovima, pa vrijedi:

$$V_i - V_{i+1} = I_i Z_1 \quad .$$

S druge strane, iz ekvivalentne sheme na slici 7.9, desno, vidimo da za istu struju I_i vrijedi:

$$I_i = \frac{V_i}{Z_e} \quad ,$$

pa dobivamo:

$$V_i - V_{i+1} = V_i \frac{Z_1}{Z_e} \quad .$$

Odavdje slijedi:

$$V_{i+1} = V_i - V_i \frac{Z_1}{Z_e} = V_i \left(1 - \frac{Z_1}{Z_e}\right) \quad .$$

Definiramo li *faktor propagacije* α kao omjer susjednih napona, za njega dobivamo:

$$\alpha = \frac{V_{i+1}}{V_i} = 1 - \frac{Z_1}{Z_e} = \frac{Z_e - Z_1}{Z_e} \quad .$$

Faktor propagacije očekivano je neovisan o položaju u mreži, pa napon na i-tom kondenzatoru možemo iterativno svesti na početnu elektromotornu silu kao:

$$V_i = \alpha^i \mathcal{E} \quad .$$

Uvrstimo li u izraz za faktor propagacije konkretne vrijednosti za Z_1 i Z_e u mreži koju razmatramo (slika 7.6), dobivamo konačno:

$$\alpha = \frac{\sqrt{L/C - \omega^2 L^2/4} + i\omega L/2 - i\omega L}{\sqrt{L/C - \omega^2 L^2/4} + i\omega L/2} = \frac{\sqrt{L/C - \omega^2 L^2/4} - i\omega L/2}{\sqrt{L/C - \omega^2 L^2/4} + i\omega L/2} \quad .$$

Ovisno o predznaku izraza pod korijenom, razlikujemo dva slučaja. Ako je frekvencija ω dovoljno malena da vrijedi:

$$\omega < \sqrt{\frac{4}{LC}} \qquad \Rightarrow \qquad L/C - \omega^2 L^2/4 > 0 \quad ,$$

tada je korijen realan i za faktor propagacije dobivamo kompleksan broj koji se može napisati u ovakvom obliku:

$$\alpha = \frac{x - iy}{x + iy} \quad ,$$

gdje su x i y realni. Apsolutne vrijednosti nazivnika i brojnika u ovom izrazu su jednake, pa zaključujemo da vrijedi:

$$|\alpha| = 1 \quad .$$

Faktor propagacije je u ovom slučaju kompleksan broj modula jednakog jedinici - zaključujemo da se na susjednim kondenzatorima mreže napon *ne mijenja* po amplitudi, već samo po fazi, što po definiciji opisuje putujući val i situaciju koja će nas zanimati i u nastavku.

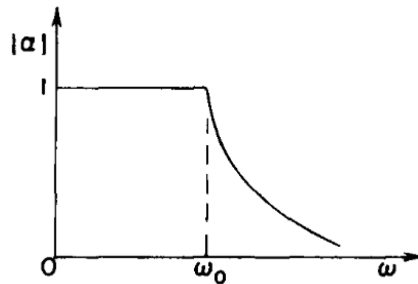
U drugom slučaju, kada vrijedi:

$$\omega > \sqrt{\frac{4}{LC}} \qquad \Rightarrow \qquad L/C - \omega^2 L^2/4 < 0 \quad ,$$

vađenjem korijena u izrazu za α dobivamo imaginaran broj, pa faktor propagacije postaje:

$$\alpha = \frac{\sqrt{L/C - \omega^2 L^2/4} - i\omega L/2}{\sqrt{L/C - \omega^2 L^2/4} + i\omega L/2} = \frac{i\sqrt{\omega^2 L^2/4 - L/C} - i\omega L/2}{i\sqrt{\omega^2 L^2/4 - L/C} + i\omega L/2} = \frac{\sqrt{\omega^2 L^2/4 - L/C} - \omega L/2}{\sqrt{\omega^2 L^2/4 - L/C} + \omega L/2} \quad .$$

Faktor propagacije je u ovom slučaju posve realan i očito manji od jedinice! Svi naponi u mreži su u fazi, no amplituda im pada i osciliranje se guši. Modul faktora propagacije dan je kao funkcija frekvencije na slici 7.10. Budući da razmatrana mreža propušta putujuće valove niskih frekvencija, a guši valove visokih frekvencija, o njoj govorimo kao o **nisko-propusnom filteru**[2].



Slika 7.10: Modul faktora propagacije $|\alpha|$ dan kao funkcija frekvencije ω. Granična frekvencija ω_0 jednaka je $\sqrt{4/(LC)}$ - u pitanju je frekvencija na kojoj izraz pod korijenom u jednadžbi za faktor propagacije mijenja predznak.

Može se pokazati da se zamjenom položaja zavojnica i kondenzatora u polu-beskonačnoj mreži dobiva sustav koji guši valove niskih frekvencija (a propušta visokih) - tada govorimo o visoko-propusnom filteru. Dakako, u praksi je nemoguće realizirati beskonačnost diskutiranih mreža, pa se iste u nekom času prekidaju ("terminiraju") završetkom u obliku otpornika posve realne impedancije; za primjer sa slike 7.8:

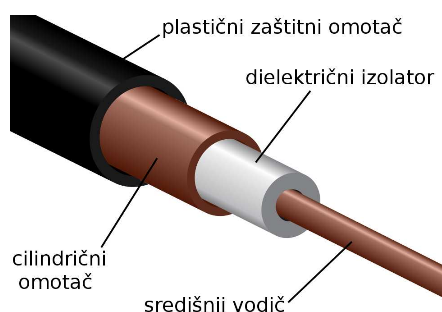
$$R = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad .$$

Ta zamjena donekle mijenja detalje ovisnosti prikazane na slici 7.10, no opći trend ostaje jednak i takav se sustav može koristiti kao filter. U sljedećem potpoglavlju nastavljamo diskusiju putujućeg vala u beskonačnom električnom sustavu, uz zadržavanje u području frekvencija u kojem nema gušenja.

[2] *engl.* low-pass filter.

7.4 Prijenosne linije

Prijenosnim linijama (*engl.* transmission lines) nazivamo kablove koji služe za prijenos visokofrekventnih signala u npr. telekomunikacijama, računalnim mrežama i mjernim instrumentima koji rade na visokim frekvencijama. Iako govorimo o visokim frekvencijama (u odnosu na frekvenciju signala u "običnim" strujnim krugovima), one su i dalje dovoljno malene da vrijedi aproksimacija kontinuuma i da do izražaja dolazi valna priroda signala. Pokušamo li takve signale poslati običnim električnim kablovima, dolazi do velikih gubitaka, refleksije i drugih nepoželjnih efekata - u ovom ćemo potpoglavlju objasniti kako te efekte izbjeći.

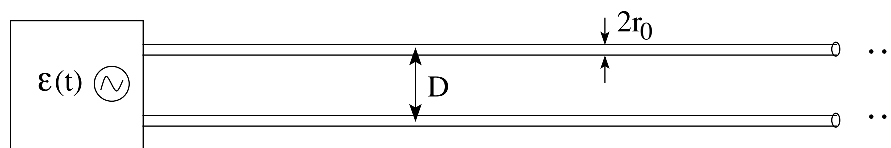


Slika 7.11: Koaksijalni kabel.

Prijenosnu liniju općenito čine dva vodiča kod kojih je geometrija stalna duž linije. Najčešća realizacija je koaksijalni kabel prikazan na slici 7.11, no moguće su i druge varijante[3]. Koaksijalni se kabel standardno sastoji od središnjeg vodiča (žice) i cilindričnog omotača koji je najčešće napravljen od pletene žice. Između njih nalazi se izolatorski sloj, a čitav je kabel omotan vanjskim zaštitnim slojem od plastike. U koaksijalnom je kablu omjer polumjera cilindričnog omotača i središnjeg vodiča konstantan duž pružanja linije. Kao što ćemo pokazati u nastavku, taj omjer određuje impedanciju koaksijalnog kabla kao prijenosne linije.

7.4.1 Najjednostavnija prijenosna linija

Drugu moguću tehničku realizaciju prijenosne linije čine dvije žice postavljene u izolatorsku traku tako da im je razmak stalan. Ovakav je sustav bitno jednostavniji za teorijsku analizu (zbog puno jednostavnije geometrije), pa ćemo njega u nastavku pogledati detaljnije.



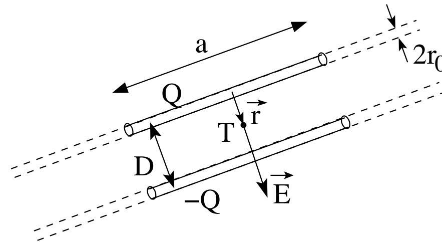
Slika 7.12: Pojednostavljena varijanta prijenosne linije.

Sustav koji razmatramo dan je na slici 7.12. Na izvor izmjenične elektromotorne sile priključena su dva cilindrična vodiča polumjera r_0, razmaknuta na udaljenost D. Da bi ovakvu prijenosnu liniju razmatrali sa stanovišta uvodnih poglavlja o električnim sustavima, ključno je pitanje postoje

[3] Jedan primjer koji nećemo razmatrati dan je i u F.S.Crawford Jr.: "Waves", str. 173.

li induktiviteti L i kapaciteti C koji bi mogli biti odgovorni za nastanak strujnog vala.

Pri prethodnim razmatranjima sustava izgrađenog od zavojnica i kondenzatora, posve smo zanemarili induktivitet i kapactitet (kao i otpor) žica koji ih spajaju, jer je vrijednost istih puno manja od samih induktiviteta i kapactiteta zavojnica i kondenzatora. U prijenosnim linijama zavojnica i kondenzatora nema, pa je induktivitet i kapactitet samih žica taj koji postaje dominantan - prijelaz sa slike 7.7 na sliku 7.12 postižemo jednostavno tako da zavojnicima smanjujemo broj zavoja, a kondenzatorima sve više razmičemo ploče.



Slika 7.13: Električno polje malenog segmenta prijenosne linije sa slike 7.12.

Razmotrimo maleni segment prijenosne linije sa slike 7.12, dan na slici 7.13. Ako se na promatranom segmentu nalazi naboj Q, onda je linijska gustoća naboja na promatranom segmentu Q/a, gdje je a duljina promatranog segmenta. Tada je električno polje u točki T koja je za r udaljena od gornjeg vodiča (a za $D-r$ od površine donjeg vodiča), jednako:

$$E(r) = \frac{Q/a}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q/a}{2\pi\epsilon_0(D-r)} \quad ;$$

(koristili smo rezultat za električno polje dugačke jednoliko nabijene žice, izveden u "Općoj fizici 2"). Napon između dva vodiča (od površine do površine) dan je s:

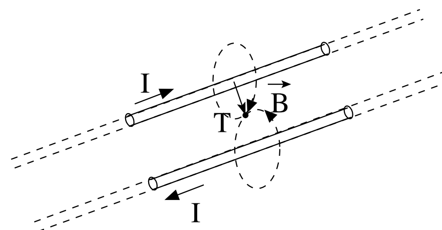
$$U = \int_{r_0}^{D-r_0} E(r)\mathrm{d}r = \frac{Q}{a}\frac{1}{2\pi\epsilon_0}2\ln\left(\frac{D-r_0}{r_0}\right) \quad .$$

Izračunajmo kapacitet po jedinici duljine promatranog segmenta; za njega će vrijediti:

$$\frac{Q}{a} = \frac{C}{a}\cdot U \quad ,$$

iz čega slijedi:

$$\frac{C}{a} = \pi\epsilon_0\frac{1}{\ln\left(\frac{D-r_0}{r_0}\right)} \quad .$$



Slika 7.14: Magnetsko polje malenog segmenta prijenosne linije sa slike 7.12.

Promotrimo sada induktivitet po jedinici duljine istog segmenta prijenosne linije; konfiguracija magnetskih polja skicirana je na slici 7.14. Budući da struje u vodičima prijenosne linije imaju

suprotne smjerove, magnetsko polje B između dva vodiča jednako je *sumi* doprinosa svakog od vodiča. U točki T koja je za r udaljena od gornjeg vodiča (a za $D-r$ od površine donjeg vodiča), imamo:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(D-r)} \quad ;$$

(koristili smo rezultat za magnetsko polje dugačke jednoliko nabijene žice, izveden u "Općoj fizici 2"). Pogledajmo magnetski tok kroz pravokutnu površinu S omeđenu s dva promatrana komada vodiča (taj pravokutnih ima stranice a i D). Silnice magnetskog polja su na toj površini okomite na površinu (paralelene s vektorom površine), pa za tok dobivamo:

$$\Phi = \int_S B(r)\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{r_0}^{D-r_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D-r}\right) a\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2a \ln\left(\frac{D-r_0}{r_0}\right) \quad .$$

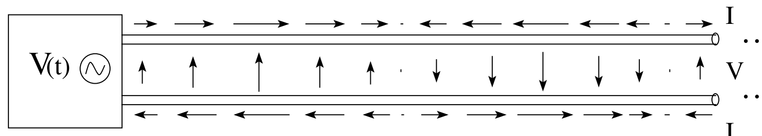
Budući da vrijedi:

$$\Phi = LI \quad , \quad \frac{\Phi}{a} = \frac{L}{a} I \quad ,$$

samoindukcija po jedinici duljine dane prijenosne linije stoga jednaka je:

$$\frac{L}{a} = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\left(\frac{D-r_0}{r_0}\right) \quad .$$

Dakle, prijenosna linija koju proučavamo ima i kapacitet i induktivitet - u njoj će stoga nastajati putujući električni val kao u primjeru sa slike 7.6. Smjerovi struja i napona u nekom trenutku dani su na slici 7.15 - oni su u fazi, kao što je objašnjeno na str. 158, jer vrijedi aproksimacija kontinuuma.



Slika 7.15: Širenje vala prijenosnom linijom.

Budući da vrijednosti kapaciteta i induktiviteta sada ovise o duljini promatranog segmenta a, upotreba valne duljine i valnog broja (kao "geometrijskih veličina") ima smisla kao i kod mehaničkog kontinuuma. Možemo, dakle, napraviti standardnu zamjenu $i\Delta\phi \to kz$, te za prijenosne linije napisati općenito:

$$I(z,t) = I_0 \sin(\omega t - kz) \quad ,$$

$$U(z,t) = U_0 \sin(\omega t - kz) \quad .$$

Za frekvenciju u aproksimaciji kontinuuma vrijedi:

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{LC}}\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \to \sqrt{\frac{4}{LC}}\frac{ka}{2} = \sqrt{\frac{1}{\frac{L}{a}\cdot\frac{C}{a}}}k \quad .$$

To je u skladu s prije napravljenim analogijama; disperzijsku relaciju za mehanički kontinuum dobivamo zamjenama $T \to (a/C)$ i $\rho \to (L/a)$.

Za razmatranu prijenosnu liniju vrijedi:

$$\frac{L}{a}\cdot\frac{C}{a} = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\left(\frac{D-r_0}{r_0}\right)\cdot\pi\epsilon_0\frac{1}{\ln\left(\frac{D-r_0}{r_0}\right)} = \mu_0\epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \quad ,$$

što za disperzijsku relaciju prijenosne linije daje:

$$\omega = ck \quad .$$

Disperzijska relacija je linearna, pa su grupna i fazna brzina širenja vala jednake:

$$v = v_\phi = v_g = c \quad .$$

U prijenosnoj se liniji val struje i napona šire brzinom svjetlosti!

Impedanciju razmatrane varijante prijenosne linije (par jednakih usporednih žica) nalazimo iz izraza 7.2:

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{L/a}{C/a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\frac{1}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{D - r_0}{r_0}\right) \quad .$$

Važna konstanta koja se pojavljuje u ovom izrazu je:

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377\ \Omega \quad ;$$

na nju ćemo se detaljnije osvrnuti u sljedećem poglavlju. Osim o njoj, impedancija linije ovisi o polumjeru žica r_0 i razmaku D među njima. Budući da mora vrijediti $D>2r_0$, argument je logaritma u gornjem izrazu nužno veći od 1, pa je impedancija uvijek pozitivna veličina, kao što smo i očekivali.

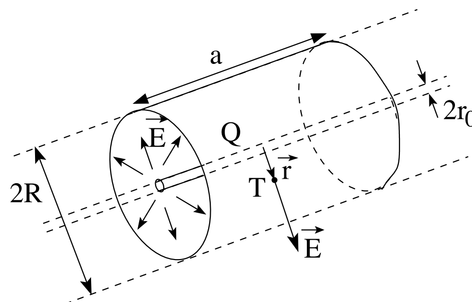
Savršeni završetak prijenosne linije postiže se priključivanjem na otpornik otpora $R=Z$. Ovaj se otpor naziva još i *zaključnim otporom* ili *terminatorom* prijenosne linije. Ako na kraj prijenosne linije priključimo otpor R' koji nije savršen ($R' \neq Z$), dolazi do **refleksije** strujnog vala:

$$\frac{I_r}{I_u} = \frac{Z - R'}{Z + R'} \quad .$$

U slučaju kratkog spoja, $R'=0$, pa vrijedi $I_r=I_u$ (struja u prijenosnoj liniji je maksimalna). U slučaju otvorenog, nespojenog kraja, $R'=\infty$, pa vrijedi $I_r=-I_u$ (tj. $I_r+I_u=0$, struja ne teče, što i očekujemo jer strujni krug nije zatvoren).

7.4.2 Koaksijalni kabel kao prijenosna linija

Slično kao što je napravljeno za par paralelnih žica, proučit ćemo brzinu širenja vala i impedanciju kod koaksijalnog kabela, realizacije prijenosne linije koja se najčešće koristi u praksi. Segment koaksijalnog kabla za koji ćemo izračunati kapacitet po jedinici duljine (preko električnog polja) i induktivitet po jedinici duljine (preko magnetskog polja), dan je na slici 7.16.



Slika 7.16: Električno polje u segmentu koaksijalnog kabla.

Na promatranom segementu duljine a i unutrašnjeg i vanjskog vodiča nalazi se naboj Q; linijska gustoća naboja je, kao i prije, Q/a. Električno polje dugog ravnog vodiča ja, kao i prije, dano s:

$$E = \frac{Q/a}{2\pi\epsilon_0 r} \quad ,$$

i po smjeru je radijalno od žice. Razlika potencijala među žicama tada je:

$$V_R - V_{r_0} = -\int_{r_0}^{R} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_{r_0}^{R} \frac{Q/a}{2\pi\epsilon_0 r}\,\mathrm{d}r = -\frac{Q/a}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r_0}\right) \quad .$$

Ako je naboj Q pozitivan, unutarnja žica je na višem, a vanjska na nižem potencijalu; napon među njima je:

$$U = |V_R - V_{r_0}| = \frac{Q/a}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r_0}\right) \quad .$$

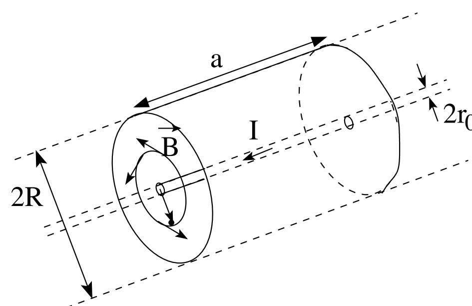
U praksi se oklop (odnosno cilindričan vodič polumjera R) uzemljuje, pa je središnji vodič na potencijalu V. Kapacitet po jedinici duljine za koaksijalni kabel je tada:

$$\frac{C}{a} = \frac{Q/a}{U} = 2\pi\epsilon_0 \frac{1}{\ln\left(\frac{R}{r_0}\right)} \quad .$$

Dosadašnja razmatranja i za koaksijalni kabel i za dva tanka paralelna vodiča napravljena su uz pretpostavku da se između vodiča nalazi vakuum (ili npr. zrak). To kod koaksijalnog kabla iz praktičnih razloga nije slučaj; u realnoj izvedbi oko središnjeg vodiča nalazi se izolator visoke relativne permitivnosti ϵ_r (npr. plastika), a vanjski je vodič ("oklop") realiziran kao metalna mrežica. Električno polje je u dielektriku za faktor ϵ_r manje od električnog polja koje bi postajalo na istom mjestu u vakuumu; gore dobivene izraze moramo stoga modificirati čineći zamjenu $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_0\epsilon_r$:

$$E = \frac{Q/a}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r r} \quad ,$$

$$\frac{C}{a} = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{1}{\ln\left(\frac{R}{r_0}\right)} \quad .$$



Slika 7.17: Magnetsko polje u segmentu koaksijalnog kabla.

Razmotrimo sada magnetsko polje i induktivitet istog segmenta koaksijalnog vodiča kada kroz njega teče struja I. Silnice magnetskog polja na udaljenosti r od osi simetrije sistema su kružnice, kao na slici 7.17. Izračunajmo ukupan tok magnetskog polja kroz pravokutnik stranica a i $R-r_0$ (od središnjeg vodiča do oklopa):

$$\Phi_B = \int B\,\mathrm{d}S = \int_{r_0}^{R} B a\,\mathrm{d}r = \int_{r_0}^{R} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{r_0}\right) \quad .$$

Samoindukcija po jedinici duljine stoga je jednaka:

$$\frac{L}{a} = \frac{\Phi_B/a}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{r_0}\right) \quad .$$

Budući da dielektrici koji se rabe kod koaksijalnih kablova nisu magnetični, dobiveni rezultat nema potrebe korigirati uvođenjem relativne magnetske permitivnosti μ_r.

Disperzijska relacija u aproksimaciji kontinuuma dana je, kao i prije (str. 164), s:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\frac{L}{a} \cdot \frac{C}{a}}} k \quad .$$

Za koaksijalni kabel dobiveno je:

$$\frac{L}{a} \cdot \frac{C}{a} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{r_0}\right) 2\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{1}{\ln\left(\frac{R}{r_0}\right)} = \epsilon_0\epsilon_r\mu_0 = \frac{\epsilon_r}{c^2} \quad ,$$

pa je disperzijska relacija za koaksijalni kable dana s:

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} k \quad .$$

Dobivena disperzijska relacija je linearna pa su grupna i fazna brzina iste i jednake:

$$v = v_\phi = v_g = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad .$$

U koaksijalnom se kablu, dakle, val struje i napona širi brzinom koja je od brzine svjetlosti manja za faktor $\sqrt{\epsilon_r}$; tipične vrijednosti relativne dielektrične konstante za plastike od kojih se radi izolacija su $\epsilon_r \approx$2-3.

Za impedanciju koaksijalnog kabla dobivamo (slično kao i na str. 165):

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{L/a}{C/a}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{r_0}\right) \quad .$$

Impedancija koaksijalnog kabla *ne ovisi o njegovoj duljini*, već samo o polumjerima središnjeg vodiča i oklopa, te dielektričnosti izolatora. Budući da se kablovima spajaju različiti električni uređaji, da bi se izbjegle nepoželjne refleksije njihove ulazno-izlazne impedancije su standardizirane, kao i impedancije samih kablova; najčešće se koristi vrijednost od $Z = 50\ \Omega$.

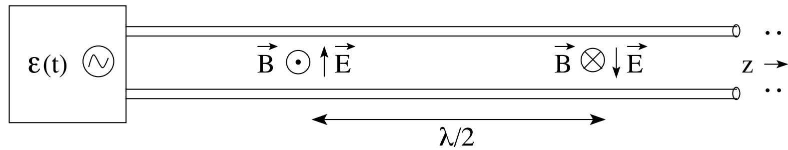
U sljedećem ćemo poglavlju prijenosnu liniju razmotriti kao izvor elektromagnetskih valova, te potom diskutirati njihova svojstva i odgovarajući matematički opis.

8

Elektromagnetski valovi

8.1 Prijenosna linija kao izvor elektromagnetskih valova

Pri razmatranju najjednostavnije prijenosne linije (dvije paralelne žice) na str. 162, zaključili smo da u njoj nastaje putujući val struje i napona. Pri tome se, dakako, oko vodiča javlja i promjenljivo električno i magnetsko polje, pa možemo govoriti i o elektromagnetskom valu. Polja su maksimalna na dijelovima prijenosne linije gdje su maksimalni naboji, odnosno struje - u prošlom smo poglavlju pokazali da su u dugovalnoj aproksimaciji struje i naponi u fazi. Očekujemo stoga da će i magnetsko i električno polje biti u fazi, te međusobno okomiti (što je isto vidljivo iz razmatranja u prošlom poglavlju).



Slika 8.1: Električno i magnetsko polje koje nastaje širenjem strujnog vala prijenosnom linijom.

Takva je situacija (u nekom proizvoljnom trenutku t) prikazana na slici 8.1. Valna duljina λ ista je za val struje, val napona, val električnog polja i val magnetskog polja. Na udaljenosti $\lambda/2$ polja su u protufazi, kao što je prikazano na slici 8.1. U nekom kasnijem trenutku dotična se faza titranja pomakne duž osi z, s brzinom širenja $v_\phi = v_g = c$.

Geometrija prijenosne linije koju razmatramo je takva da polja $\vec{E}$ i $\vec{B}$ nisu homogena u prostoru. Želimo li $\vec{E}$ i $\vec{B}$ dobiti kao **ravan val**, prijenosna linija mora imati drukčiju geometriju: mora se sastojati od dvaju paralelnih ploča širine D, beskonačne duljine (duž osi z), te međusobno razmaknutih za udaljenost d (slika 8.2).

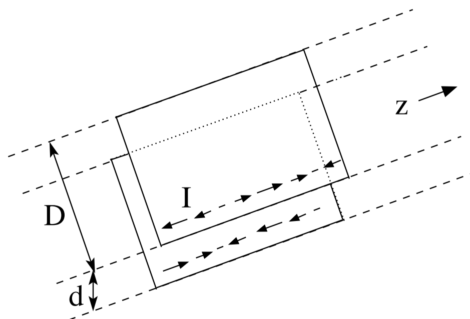
Ishodište z-osi postavimo tako da je u njemu izvor izmjenične elektromotorne sile $\mathcal{E}(t)$ i frekvencije ω. Duž prijenosne linije širi se, kao i u primjerima u prošlom poglavlju, val struje i napona. Ako su ploče homogene, struja će imati istu jakost u svim točkama duž njihove širine D (za dani z), pa val struje i napona ima oblik:

$$I(z,t) = I_0 \sin(\omega t - kz) \quad ,$$

$$U(z,t) = U_0 \sin(\omega t - kz) \quad .$$

Magnetsko polje koje stvara struja, kao i električno polje koje stvara napon, imaju stoga istu ovisnost o z-koordinati:

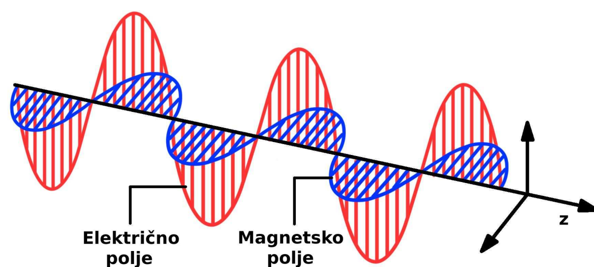
$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - kz) \quad ,$$



Slika 8.2: Segment prijenosne linije koja se sastoji od beskonačno dugačkih paralelnih ploča.

$$\vec{B}(z,t) = \vec{B}_0 \sin(\omega t - kz) \quad .$$

Kao i primjerima u prošlom poglavlju, električno polje ima smjer okomit na ploče, dok je magnetsko polje usmjereno duž ploča, ali okomito na z-os. Ako je $d \ll D$ (tj. ako su ploče blizu jedna drugoj u odnosu na njihovu širinu), stvoreno električno i magnetsko polje su homogeni duž širine D (osim blizu rubova, što nas ne zanima). Dakle, ovakvom se prijenosnom linijom stvara *ravan elektromagnetski val* u prostoru oko linije. Polja u raznim točkama duž osi z možemo prikazati kao na slici 8.3. Dakako, u kasnijem se trenucima faza titranja pomiče duž osi z brzinom $c = v_\phi$.



Slika 8.3: Električno i magnetsko polje nastalo strujnim valom u prijenosnoj liniji sa slike 8.2, u točkama duž osi z, u nekom trenutku t.

Razmatranjem koje je analogno napravljenom na primjerima u prošlom poglavlju (na segmentu linije duljine a), može se pokazati[1] da za ovakvu prijenosnu liniju vrijedi:

$$\frac{C}{a} = \epsilon_0 \frac{D}{d} \quad , \quad \frac{L}{a} = \mu_0 \frac{d}{D} \quad .$$

Disperzijska relacija je stoga opet:

$$\omega = ck \quad ,$$

fazna i grupna brzina su iste i jednake c, dok za impedanciju vrijedi:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{d}{D} \quad . \tag{8.1}$$

No prijenosna linija ovakve geometrije ima vrlo jednostavnu vezu između električnog polja i napona, te magnetskog polja i struje kroz traku (odgovarajuće su jednadžbe izvedene na "Općoj fizici 2"). Krećući od relacije $Z = U/I$, i uz $E = U/d$ (za kondenzator), te $B = \mu_0 I/D$ (preko Amperovog zakona), impedanciju možemo stoga zapisati i ovako:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{Ed}{BD/\mu_0} = \mu_0 \frac{E}{B} \frac{d}{D} \quad .$$

[1] Za detalje izvoda pogledati F.S.Crawford Jr.: "Waves", str. 173.

Izjednačavanjem dva izraza za Z, dobivamo:

$$E = cB \quad . \tag{8.2}$$

Za ovakvu vezu iznosa električnog i magnetskog polja na "Općoj fizici 2" pokazali smo da je ispunjena općenito za elektromagnetski val (izvod će biti ponovljen kasnije u poglavlju). I što se tiče smjerova polja, rezultati dobiveni ovdje konzistentni su s onima izvedenim iz Maxwellovih jednadžbi.

Dakako, isti bi rezultat dobili detaljnim razmatranjem prijenosne linije proizvoljne geometrije - "pločasti" oblik u tom je smislu samo najjednostavniji primjer i zato smo ga ovdje naveli eksplicitno. Kod prijenosnih linija diskutiranih u sedmom poglavlju i električna i magnetska polja nisu homogena u prostoru definiranom linijom, pa je traženje veze između njihovih iznosa nešto kompliciranije.

8.2 Elektromagnetski val u vakuumu

Zamislimo sada da je prijenosna linija prekinuta na nekom mjestu. Elektromagnetski val koji je putovao duž nje, na tom će se mjestu djelomično reflektirati, ali djelomično i transmitirati u otvoreni vakuum (zapravo zrak, ali u kontekstu ovog poglavlja razlika je nebitna). Otvoreni vakuum možemo zamisliti kao prijenosnu liniju kod koje i d i D teže "jednako brzo" u beskonačnost (pa vrijedi $d/D \rightarrow 1$); svi smjerovi prostora postaju ekvivalentni. Impedancija otvorenog vakuuma stoga postaje (iz izraza 8.1):

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\frac{d}{D} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377\ \Omega \quad . \tag{8.3}$$

Zašto vakuum, odnosno prazan prostor, ima impedanciju (različitu od nule)? Koji je smisao takve impedancije? Pokušajmo proširiti analogiju između mehaničkih i električnih veličina na polja i potražimo odgovor kroz te analogije (tablica 8.1).

mehaničke	električne	polja
F	U	E
$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$	I	B/μ_0
$F{=}Z\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$	$U{=}ZI$	$E{=}ZB/\mu_0$

Tablica 8.1: Impedancija kroz odnos električnog i magnetskog polja.

Impedancija nam mjeri opiranje sustavu osciliranju - podsjetimo se prvo kako se ona pojavljuje kod valova u mehaničkim (vidi str. 90). i električnim sustavima (vidi str. 156). Sili F u mehaničkom sustavu, odgovara napon U u električnom, koji smo pak u prijenosnim linijama povezali s električnim poljem E. Magnetsko polje B je, pak, povezano sa strujom I, koja u mehaničkom slučaju odgovara brzini titranja čestica v. Impedanciju smo u mehaničkom sustavu definirali kao konstantu proporcionalnosti između sile F i brzine v, a u električnom sustavu kao konstantu proporcionalnosti između napona V i struje I - iz ovih analogija slijedi da je impedancija kod polja faktor proporcionalnosti između električnog i magnetskog polja (puta konstanta μ_0).

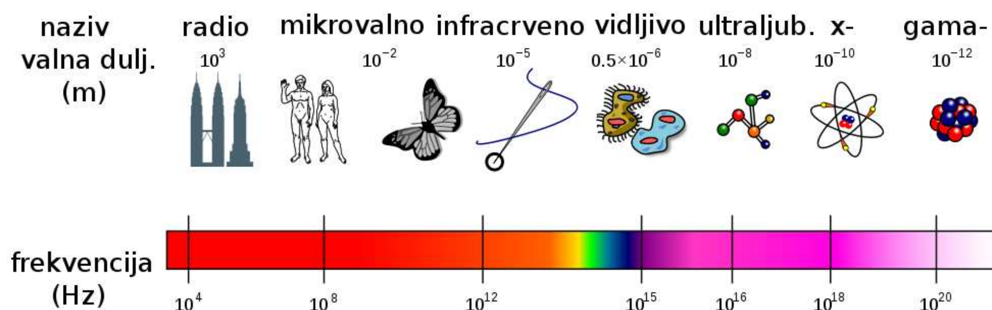
Postojanje impedancije vakuuma različito od nule jednostavno znači to da je za širenje vala magnetskog polja potrebno titranje električnog polja (i obrnuto). Konkretna numerička vrijednost impedancije Z za vakuum (377 Ω) posljedica je konstanti ϵ_0 i μ_0, a one naprosto daju vezu između vrijednosti polja E i B kod elektromagnetskog vala u danom sustavu jedinica (SI).

8.3 Elektromagnetski spektar

U narednom ćemo se potpoglavlju podsjetiti da se rezultati koje smo dobili mogu dobiti direktno iz Maxwellovih jednadžbi, i da općenito vrijedi rezultat (kojeg smo mi izveli u dugovalnoj aproksimaciji):

$$\omega = ck \quad , \quad \lambda\nu = c \quad .$$

Elektromagnetski se val, dakle, može širiti praznim prostorom s proizvoljnom valnom duljinom (i odgovarajućom frekvencijom) - standardni nazivi za pojedina frekventna područja elektromagnetskog zračenja dani su na slici 8.4 i kasnije u tablici 8.2.



Slika 8.4: Elektromagnetski spektar.

U prethodnom poglavlju pokazali smo povezanost širenja strujnog vala s nastankom elektromagnetskih valova - diskutirajmo sada par važnih specijalnih slučajeva širenja vala prijenosnim linijama.

1) Električna struja za napajanje u dalekovodima i gradskoj mreži ima frekvenciju ν= 50 Hz, kojoj odgovara valna duljina:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{50} = 6 \cdot 10^6 \text{ m} = 6000 \text{ km} \quad .$$

Žice koje spajaju izvor elektromotorne sile (npr. elektranu) s lokalnom trafostanicom i dalje s potrošačima puno su kraće od valne duljine; to znači da struja i napon na potrošaču titraju praktički u fazi (tj. bez kašnjenja) s izvorom. Valno ponašanje ne dolazi do izražaja - impedancija nema nikakvog učinka (jer su valna svojstva nebitna), pa se žice takvih linija mogu slobodno postavljati i ne moraju biti paralelne jedna drugoj.

2) Kod audiofrekventne tehnike (muzičke linije i slično) standardne su frekvencije signala od reda ν= 1 kHz (to je frekvencija na kojoj je uho najosjetljivije). Toj frekvenciji odgovara valna duljina:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^3} = 3 \cdot 10^5 \text{ m} = 300 \text{ km} \quad .$$

Žice koje spajaju izvor (npr. pojačalo) s potrošačem (npr. zvučnikom) i u ovom slučaju puno su kraće od valne duljine pa se valno ponašanje ne opaža. Žice mogu biti "obične" i može ih se postavljati bez ograničenja.

3) Radiofrekventna i TV-tehnika tipično radi na frekvencijama oko ν= 100 MHz, kojima odgovaraju valne duljine od oko:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^8} = 3 \text{ m} \quad .$$

Kablovi su usporedivih dimenzija - očekujemo stoga da će valna svojstva dolaziti do izražaja. Uređaje se mora spajati kablovima kod kojih par žica ima istu geometriju duž cijele dužine (i

time nepromjenljivu impedanciju); u protivnom bi na mjestima promjene impedancije dolazilo do nepoželjne refleksije strujnog vala. Instrumenti i uređaji koji se spajaju moraju imati dobro definirane ulazne i izlazne impedancije, a prijenosne linije (najčešće koaksijalni kablovi) istu impedanciju da na spojevima ne bi dolazilo do refleksije. Najčešći standard je impedancija od 50 Ω, dok se u nekim specijalnim slučajevima koriste i kablovi od 75 Ω (antentski kablovi) ili 100 Ω (neki laboratorijski kablovi).

4) Mikrovalovima odgovaraju frekvencije reda GHz, odnosno valne duljine

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^9} = 0.3 \text{ m} \quad ;$$

oni se također mogu širiti koaksijalnim kablovima od metalnih žica.

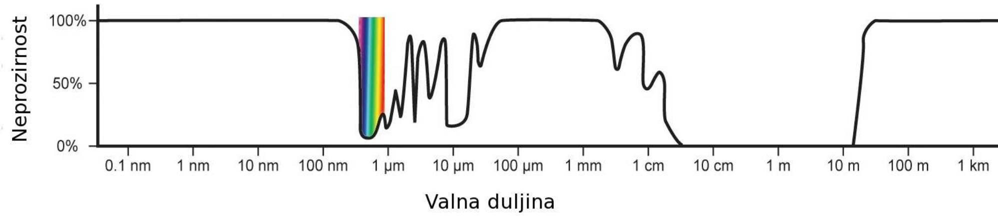
5) Svjetlost ima valne duljine između 380 nm (ljubičasta boja) i 750 nm (crvena boja) - elektromagnetski valovi ovih valnih duljina mogu se širiti tzv. optičkim kablovima (koji su zapravo dielektrična vlakna). Takvi "optički valovodi" bit će detaljno diskutirani na kolegiju "Klasična elektrodinamika".

Svako elektromagnetsko zračenje može se posve ekvivalentno opisati preko frekvencije ν, valne duljine λ ili energije fotona $E{=}h\nu$ (gdje je h Planckova konstanta, o čemu će više biti riječi na "Općoj fizici 4"). No, kroz praksu je uobičajeno postalo opisivanje elektromagnetskog vala kao što je dano u tablici 8.2.

pomoću frekvencije	
audiofrekventno	kHz
radiofrekventno (i TV)	MHz
mikrovalno	GHz
pomoću valne duljine	
infracrveno	μm
vidljivo	380 -750 nm
ultraljubičasto	<380 nm
pomoću energije	
rendgensko (x-)	keV
gama-zrake	MeV

Tablica 8.2: Uobičajeno opisivanje elektromagnetskih valova.

Osim na način opisan u ovom poglavlju, elektromagnetsko zračenje nastaje i na bitno drugačiji način, zbog termalnog gibanja nabijenih čestica u nekom tijelo. To tzv. **toplinsko zračenje** emitira *svako* tijelo s temperaturom iznad apsolutne nule, i mi ćemo ga detaljno diskutirati na "Općoj fizici 4". Iz Svemira na Zemljinu atmosferu pada elektromagnetsko zračenje nastalo na razne načine - slika 8.5 pokazuje kako apsorpcija tog zračenja ovisi o njegovoj valnoj duljini. Sa slike se lako uočava da je atmosfera posve neprozirna za elektromagnetsko zračenje valnih duljina kraćih od 100 nm - to je, dakako, nužno za nastanak i opstanak života na Zemlji, jer je to elektomagnetsko zračenje dovoljno velikih energija da oštećuje stanice i tkivo živih organizama.



Slika 8.5: Ovisnost (ne)prozirnosti atmosfere o valnoj duljini elektromagetskog zračenja.

8.4 Elektromagnetski valovi u vakuumu

Prisjetimo se za kraj ovog poglavlja u bitnome razmatranja elektromagnteskih valova u vakuumu s "Opće fizike 2". U vakuumu nisu prisutni naboji i njihove struje, pa se Maxwellove jednadžbe svode na puno simetričniji oblik:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad , \tag{8.4}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad , \tag{8.5}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \tag{8.6}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad . \tag{8.7}$$

Izvod valne jednadžbe za elektromagnetske valove u vakuumu započnimo derivirajući jednadžbu 8.7 (četvrtu Maxwellovu jednadžbu) parcijalno po vremenu:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \quad . \tag{8.8}$$

Na desnoj ćemo strani trivijalno dobiti drugu parcijalnu derivaciju električnog polja po vremenu, dok za lijevu stranu koristimo svojstvo da je poredak parcijalnog derivanja nebitan:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ;$$

Nadalje, treća Maxwellova jednadžba (izraz 8.6) sada vodi na:

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \quad . \tag{8.9}$$

Iskoristimo li izraz za rotaciju rotacije[2]:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} \quad ,$$

dobivamo:

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) + \nabla^2 \vec{E} \quad .$$

U vakuumu je divergencija električnog polja jednaka nuli (po prvoj Maxwellovoj jednadžbi, odnosno Gaussovom zakonu 8.4), pa prvi član na desnoj strani gornjeg izraza nestaje i konačno dobivamo:

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla^2 \vec{E} \quad .$$

[2]Bronštejn *et al.*, str. 660., izraz 13.96.

Uvrštavanjem u izraz 8.8 dobivamo:

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad . \tag{8.10}$$

Dobili smo **valnu jednadžbu** za električno polje, identičnu u obliku s valnom jednadžbom diskutiranom u mehanici. Njeno je rješenje dano s:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) = \vec{E}_0 \sin\left(\omega t - k_x x - k_y y - k_y z\right) \quad . \tag{8.11}$$

Budući da su Maxwellove jednadžbe u vakuumu (ρ=0, j=0) simetrične na zamjenu $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$ (do na konstante), jednostavno je pokazati da se i za magnetsko polje dobiva valna jednadžba:

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad ,$$

čije je formalno rješenje opet:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) \quad .$$

Dakle, jednom kada u vakuumu proizvedemo vezano električno i magnetsko polje (npr. prijenosnom linijom), ono će se širiti prostorom kao putujući val brzinom c.

Što možemo reći o smjerovima vektora $\vec{E}$ i $\vec{B}$? Postavimo koordinatni sustav tako da se val širi u z-smjeru. Električni val tada je dan s:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin\left(\omega t - kz\right) \quad ,$$

gdje je amplituda titranja električnog polja općenito:

$$\vec{E}_0 = E_{0x} \hat{\imath} + E_{0y} \hat{\jmath} + E_{0z} \hat{k} \quad .$$

Ovakvo rješenje odgovara tzv. *ravnom valu* (ili superpoziciji istih), a kod takvog rješenja nema ovisnosti električnog polja o smjerovima okomitim na smjer širenja vala. Dakle:

$$\vec{E} \neq \vec{E}(x, y) \quad .$$

Uvrstimo li takvo rješenje za električno polje $\vec{E}$ u prvu Maxwellovu jednadžbu (Gaussov zakon), uz ρ=0 (u vakuumu!):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad ,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(E_x \hat{\imath} + E_y \hat{\jmath} + E_z \hat{k}\right) = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad .$$

No amplituda vala ne ovisi o koordinatama x i y, već isključivo o koordinati z (izabrali smo da se val širi u z-smjeru). To *ne znači* da ne postoje x- i y-komponente vektora električnog polja, već samo to da se nijedna od komponenti ne mijenja u x- i y-smjeru. Stoga od tri parcijalne derivacije u gornjoj jednadžbi preživljava samo jedna, pa dobivamo:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad .$$

Zaključujemo da se E_z ne mijenja duž z-smjera - to znači da ova komponenta može biti konstantna, no bez gubitka općenitosti možemo ju izjednačiti s nulom (zanimaju nas samo titranja polja!):

$$E_z = E_{0z} = 0 \quad .$$

Dakle, električno polje elektromagnetskog vala nema komponentu duž smjera širenja vala, tj. titranje električnog polja je **transverzalno** na smjer širenja vala.

U kojem smjeru titra magnetsko polje? Da to saznamo, kao i u prethodnom razmatranju, koordinatni sustav ćemo postaviti tako da se val širi u z-smjeru. Malo prije smo zaključili da električno polje titra u nekom transverzalnom smjeru na smjer širenja vala - koordinatni sustav ćemo nadalje postaviti tako da se to titranje dešava duž x-osi. Sve u svemu, koordinatni sustav smo izabrali tako da vrijedi:

$$E_y = E_z = 0 \quad .$$

Rotacija električnog polja tada poprima jednostavan oblik

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{\jmath} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\hat{k} = \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{\jmath} \quad ,$$

jer se E_x ne mijenja duž smjera y. Treća Maxwellova jednadžba sada postaje:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{\jmath} = -\hat{\imath}\frac{\partial B_x}{\partial t} - \hat{\jmath}\frac{\partial B_y}{\partial t} - \hat{k}\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad .$$

Ova vektorska jednadžba svodi se na tri skalarne (izjednačavanjem lijeve i desne strane za svaki od tri smjera, x, y i z):

$$0 = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad B_x = \text{konst.} = 0 \quad ;$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad ;$$

$$0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad B_z = \text{konst.} = 0 \quad .$$

Dakle, uz odabrani koordinatni sustav, magnetsko polje titra u y-smjeru, *okomito i na smjer širenja vala i na smjer titranja električnog polja*. Takav odnos smjerova polja prikazuje slika 8.3.

Kakav je relativan odnos amplituda električnog i magnetskog polja? Uvrstimo li u dobivenu jednadžbu za B_y rješenje za električno polje:

$$E_x(z,t) = E_0 \sin(\omega t - kz) \quad ,$$

dobivamo:

$$-kE_0 \cos(\omega t - kz) = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad ,$$

$$B_y = \int kE_0 \cos(\omega t - kz) \mathrm{d}t = E_0 \sin(\omega t - kz)\frac{k}{\omega} = \frac{E_x}{c} \quad .$$

Magnetska komponenta elektromagnetskog vala u vakuumu manja je, dakle, od električne za faktor c. Ta disproporcija u iznosima posljedica je načina na koji su izabrane mjerne jedinice SI-sustava; pokazat ćemo da je energija koju prenosi magnetska komponenta jednaka energiji koju prenosi električna.

Spomenimo za kraj da ravni val nije jedino rješenje valne jednadžbe - analogno razmatranju provedenom unutar poglavlja ("Akustika"), točkasti izvori stvaraju sferne elektromagnetske valove, kojima ćemo se djelom posvetiti u sljedećem poglavlju ("Optika").

8.5 Intenzitet i tlak elektromagnetskog zračenja

Intenzitet zračenja elekromagnetskog vala definiramo kao usrednjenu energiju koja u jediničnom vremenu pređe kroz jediničnu površinu (okomitu na smjer širenja elektromagnetskog vala):

$$I = \langle S \rangle = \langle |\vec{S}| \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2 \quad ,$$

gdje je $\vec{S}$ **Poyntingov vektor** definiran na "Općoj fizici 2" ovako:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \quad . \tag{8.12}$$

Usrednjivanje se vrši tijekom vremena koje je puno dulje od perioda titranja električnog i magnetskog polja.

Elektromagnetski val nosi sa sobom i neki impuls (količinu gibanja) $\vec{p}$ - budući da kvanti elektromagnetskog zračenja (fotoni) nemaju masu, energija i količina gibanja povezani su sljedećim relativističkim izrazom:

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \qquad \Rightarrow \qquad E = pc \quad .$$

Intenzitet zračenja I po definiciji daje količinu energije koja prođe kroz neku površinu A u vremenu t, pa će odgovarajuća količina gibanja (prenešena kroz odabranu površinu A u vremenu t) biti dana s:

$$\frac{I}{c} = \frac{\langle |\vec{S}| \rangle}{c} = \frac{1}{\mu_0 c}\langle |\vec{E} \times \vec{B}| \rangle \quad .$$

Ova je količina gibanja odgovorna za tzv. *tlak zračenja*. Kada se elektromagnetsko zračenje posve apsorbirana na nekoj površini, tada se i njegova količina gibanja prenosi na nju. Jednostavnosti radi, pretpostavimo da zračenje upada okomito na površinu - tada je prosječna sila po jedinici površine (tj. tlak) jednaka upravo apsorbiranoj količini gibanja po vremenu. Dakle, za tlak zračenja (ako isto pada okomito na neku površinu i apsorbira se) dobivamo:

$$p_{\mathrm{rad}} = \frac{I}{c} = \frac{1}{\mu_0 c}\langle |\vec{E} \times \vec{B}| \rangle \quad .$$

Ako se zračenje (pri okomitom upadu) savršeno reflektira, tlak je zračenja dvostruko veći jer je i odgovarajuća promjena količine gibanje dvostruko veća.

Napomenimo da je ovdje dan samo vrlo "shematsko" opravdanje izraza za impuls i tlak elektromagnetskog zračenja - sistematičniji i matematički rigorozniji izvod bit će dan na višim godinama studija[3].

Pogledajmo za kraj jedan primjer - intenzitet Sunčevog zračenja (prije prolaska kroz atomsferu) jednak je 1.4 kW/m^2, što odgovara tlaku:

$$p_{\mathrm{rad}} = \frac{I}{c} = 4.7 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{Pa} \quad .$$

Riječ je, dakako, o vrlo malenom tlaku, no isti se bez problema mjeri modernim osjetljivim instrumentima i mjerenja potvrđuju gornje izraze.

Tlak je zračenja puno veći u unutrašnjosti zvijezda (uključujući naše Sunce) - kod masivnijih zvijezda, taj tlak može biti i bitno veći od tlaka plazme. Slično vrijedi i za rani Svemir - neposredno nakon Velikog praska, Svemirom je posve dominiralo zračenje...

[3] Pogledati npr. W.C.Elmore, M.A.Heald: *"Physics of Waves"*, Dover Books on Physics, 1985.

8.6 Stojni elektromagnetski valovi

Kao i kod svih ostalih valova, refleksijom putujućeg elektromagnetskog vala (npr. metalnom pločom) u dijelu prostora u kojem se "preklapaju" upadni i reflektirani val dobivamo stojni val. Ono što je posebnost stojnog elektromagnetskog vala je relativan odnos električnog i magnetskog polja: jednostavna veza koju smo dobili za putujući val, prilično se komplicira.

I za upadni i za reflektirani val relacija 8.12 povezuje smjerove širenja vala, električnog i magnetskog polja. No, dva se vala šire u različitim smjerovima, tj. vektori $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$ su im antiparalelni. To ima za posljedicu sljedeći efekt: na mjestima gdje su električna polja dvaju vala paralelna, magnetska polja moraju biti antiparalelna, da bi relacija 8.12 vrijedila zasebno za upadni i reflektirani val. Na mjestima gdje ukupno električno polje stojnog vala ima maksimalnu amplitudu, magnetsko polje posve nestaje (ima čvor), i obrnuto. Dakako, ovo se može pokazati i strogo matematički. Krenimo od upadnog putujućeg vala s električnom i magnetskom komponentom jednakom:

$$E_x^u(z,t) = E_0 \sin(\omega t - kz) \quad ,$$

$$B_y^u(z,t) = B_0 \sin(\omega t - kz) \quad ,$$

Kao u potpoglavlju 8.2, za smjer širenja vala odabrali smo z-os, za smjer titranja električnog polja x-os, što vodi na titranje magnetskog polja u y-smjeru. Postavimo ploču na koji se ovaj putujući ravni val reflektira u ravninu z=0. Riječ je o metalnoj ploči, pa zahtjevamo da duž nje vrijedi $\vec{E}$=0. Dakle, reflektirana će električna komponenta vala biti dana s:

$$E_x^r(z,t) = -E_0 \sin(\omega t + kz) \quad ;$$

budući da se reflektirani val širi u smjeru $-z$, za njegovu magnetsku komponentu mora vrijediti:

$$B_y^r(z,t) = B_0 \sin(\omega t + kz) \quad .$$

Dakle, za ukupno električno polje dobivamo:

$$E_x(z,t) = E_x^u + E_x^r = E_0 \sin(\omega t - kz) - E_0 \sin(\omega t + kz) = -2E_0 \sin(kz) \cos(\omega t) \quad ,$$

a za magnetsko:

$$B_y(z,t) = B_y^u + B_y^r = B_0 \sin(\omega t - kz) + B_0 \sin(\omega t + kz) = 2B_0 \cos(kz) \sin(\omega t) \quad .$$

Električno i magnetsko polje više nisu u fazi (u vremenu), već "pomaknuti" za $\Delta\phi = \pi/2$. Nadalje, dok je električno polje uvijek jednako nuli na reflektirajućoj ploči (i u čvorovima s $|z| = \lambda/2$, λ, $3\lambda/2$, ...), za magnetsko polje to ne vrijedi: čvorovi magnetskog polja nalaze se u točkama $|z| = \lambda/4$, $3\lambda/4$, $5\lambda/4$, ...

Okružimo li neko područje praznog prostora sa svih strana s reflektirajućim pločama, govorimo o "šupljini" (*engl.* cavity), u kojoj se elektromagnetski valovi mogu kontinuirano reflektirati od svih površina. Pogledajmo jednodimenzionalan slučaj - između dvije paralelne ravne ploče moći će se stvoriti samo oni elektromagnetski stojni valovi za koje je razmak ploča cjelobrojni višekratnik valne duljine (λ_n=$2L/n$). Primjer takve šupljine je mikrovalna pećnica - budući da se u njoj koriste elektromagnetski valovi valne duljine 12.2 cm, dimenzije pećnice su cjelobrojni višekratnici duljine 6.1 cm. Da bi se hrana u mikrovalnoj pećnici ravnomjerno zagrijala, treba je rotirati - u protivnom bi dijelovi hrane oko čvorova ostali hladni. Sam proces zagrijavanja u mikrovalnoj pećnici uključuje pobuđivanje rotacije molekula vode - o tome će više biti riječi na "Općoj fizici 4".

8.7 Relativistički Dopplerov efekt

Prije prelaska na optiku, razmotrimo još jedno svojstvo koje razlikuje elektromagnetske od ostalih valova, a to je način na koji mijenjaju frekvenciju zbog gibanja izvora ili prijemnika (promatrača). Čim razmatramo relativna gibanja koja uključuju val koji se giba brzinom svjetlosti, moramo koristiti relativistički formalizam, pa se o pravilu koje ćemo izvesti uobičajeno govori kao o *relativističkom Dopplerovom efektu*. Princip izvoda je isti kao i kod "običnog" Dopplerovog efekta, diskutiranog na str. 148.

Kao i u izvodu na str. 148, ograničavamo se na jednodimenzionalan slučaj, odnosno na situaciju u kojoj se izvor elektromagnetskih valova giba ravno prema promatraču. Bitna razlika je ta da nam ne treba medij ("eter") kojim se širi val (kod zvuka to je bio zrak), tako da nemamo referentni sustav u kojem se val širi točno određenom brzinom vala (npr. zvuka) - elektromagnetsko se zračenje u svim inercijskim sustavima širi istom brzinom (c). Zanima nas što registrira promatrač u svom referentnom sustavu ako mu se izvor elektromagnetskih valova **približava** brzinom v. U referentnom sustavu izvora, emitirano zračenje ima frekvenciju f_i kojem odgovara period T_i=1/f_i. Koju frekvenciju bilježi promatrač?

Neka T bude vrijeme između dvije uzastopne emisije valne fronte (koja npr. odgovara maksimumu vala) u referentnom sustavu opažača. Budući da su te dvije valne fronte emitirane na različitim lokacijama, to *nije* vrijeme između njihove registracije od strane opažača. Naime, tijekom vremena T prva emitirana valna fronta pomaknula se prema promatraču za cT (mjereno u sustavu promatrača), dok se izvor pomaknuto za vT u istom smjeru. Udaljenost valnih fronti (tj. valna duljina λ) u sustavu promatrača jednaka je stoga:

$$\lambda = (c-v)T \quad .$$

Frekvencija koju mjeri promatrač jednaka je, dakle:

$$f_o = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{(c-v)T} \quad .$$

Za sada nam je izvod identičan prije napravljenom izvodu za nerelativistički Dopplerov efekt, no sada slijedi razlika: vrijeme T u relativistici nije identično vremenu T_i, već je njihova veza dana odgovarajućim izrazom za dilataciju:

$$T = \frac{T_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{cT_i}{\sqrt{c^2-v^2}} \quad .$$

Dakle, za frekvenciju koju mjeri opažač dobivamo:

$$f_o = \frac{c}{(c-v)} \cdot \frac{1}{\frac{cT_i}{\sqrt{c^2-v^2}}} == \frac{c\sqrt{c^2-v^2}}{cT_i(c-v)} = \frac{\sqrt{c^2-v^2}}{c-v} f_i \quad .$$

Uvrstimo li ovdje izraz za razliku kvadrata: $c^2 - v^2 = (c-v)(c+v)$, dobivamo konačno:

$$f_o = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} f_i \quad . \tag{8.13}$$

Dakako, ako se izvor udaljava od promatrača, predznak brzine u gornjem izrazu treba promijeniti (i u brojniku i u nazivniku) i tada je detektirana frekvencija manja od emitirane. Za svjetlost (kojom ćemo se detaljno baviti u narednom poglavlju), ako se izvor giba prema nama, ista će biti plavija, dok će se objekti koji se udaljavaju od nas činiti crvenijim (pa govorimo o tzv. "pomaku k crvenom").

Relativistički Dopplerov efekt svoju primjenu nalazi npr. u policijskim radarima kojima se pomoću elektromagnetskih valova u mikrovalnom području (f≈30 GHz) određuje brzina automobila kao izvora reflektiranog zračenja emitiranog od strane samog radara.

9

Optika

Pod izrazom “svjetlost” obično se misli na vidljivo elektromagnetsko zračenje, valnih duljina između 380 i 750 nm. Sve što smo u prošlom poglavlju naučili općenito o elektromagnetskim valovima, vrijedi stoga i za svjetlost. S druge strane, dio zaključaka do kojih ćemo doći u ovom poglavlju, vrijedit će i za druge dijelove elektromagnetskog spektra (a posebno za frekvencije bliske svjetlosti). To se odnosi već i na prvo sljedeće potpoglavlje, u kojem ćemo diskutirati ponašanje elektromagnetskih valova u dielektriku. Budući da su za dielektrična svojstva ključni efekti na atomskom nivou, jasno je da će valna duljina elektromagnetskih valova imati ogromnu ulogu na njihovo širenje materijalom. U ovom poglavlju nećemo proučavati detalje tog mehanizma (to ostavljamo za kolegije na višim godinama), već ćemo samo proučiti ponašanje vidljive svjetlosti u raznim fizičkim situacijama i scenarijima.

9.1 Svjetlost u dielektriku

Dielektrici su izolatori, tvari koje ne vode električnu struju. Kod njih elektroni ostaju vezani za matični atom i nisu globalno pokretljivi. No oni ipak osjećaju vanjsko električno polje - pod njegovim se utjecajem u svakom atomu “elektronski oblak” malo pomakne naspram atomske jezgre (kao što smo raspravili na “Općoj fizici 2”). To rezultira u smanjivanju električnog polja za faktor ϵ_r:

$$\vec{E}_{\text{diel.}} = \frac{\vec{E}_{\text{vak.}}}{\epsilon_r} \quad ;$$

relativna permitivnost dielektrika (odnosno relativna dielektrična konstanta) ϵ_r je, dakako, bezdimenzionalna veličina i ovisi o materijalu dielektrika. Uvijek vrijedi $\epsilon_r > 1$.

Kao i u prethodnom poglavlju, prelazak s jednadžbi za vakuum na jednadžbe za dielektrik vrši se zamjenom $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_r \epsilon_0$. Disperzijska relacija za elektromagnetske valove u dielektriku postaje stoga:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}} k = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} k \quad .$$

Brzina svjetlosti u dielektriku je, dakle, uvijek manja od brzine svjetlosti u vakuumu:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad < \quad c \quad .$$

Za impedanciju se iz izraza 8.3, uz istu zamjenu, dobiva:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} = \frac{377 \ \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad .$$

Dakle, impedancija za širenje elektromagnetskih valova u dielektriku manja je od impedancije u vakuumu.

Umjesto $\sqrt{\epsilon_r}$ uobičajeno se koristi **indeks loma** n; veza među njima je:

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad . \tag{9.1}$$

Kao što je već naglašeno, magnetska permaebilnost svih materijala koji su prozirni za vidljivu svjetlost je $\mu_r \approx 1$, pa se gornji izraz svodi na:

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \quad .$$

Sam naziv "indeks loma" povijesnog je karaktera i postat će jasniji kasnije. Veličina n, dakle, za dani dielektrik određuje brzinu svjetlosti i impedanciju:

$$v = \frac{c}{n} \qquad , \qquad Z = \frac{377\ \Omega}{n} \quad .$$

Očito za vakuum vrijedi n=1, a za dielektrike n>1 - popis vrijednosti indeksa loma za važnije materijale dan je u tablici 9.1.

sredstvo	n
vakuum	1
zrak	1.0003
led	1.309
voda	1.33
staklo	1.5
dijamant	2.4

Tablica 9.1: Indeks loma nekih važnijih materijala (za svjetlost valne duljine 589 nm).

Budući da relativna dielektrična konstanta materijala ovisi o frekvenciji titranja električnog polja (pa time i o valnoj duljini elektromagnetskog vala), i indeks loma n ovisi o valnoj duljini svjetlosti (za neke materijale jače, za neke manje) U tablicama se indeks loma standardno navodi za svjetlost valne duljine 589 nm (riječ je o valnoj duljini jedne intenzivne žute karakteristčne linije u spektru natrija). S druge strane, relativna dielektrična konstanta standarno se tabelira za statična električna polja ili polja niskih frekvencija osciliranja - od tuda npr. dolazi i prividno neslaganje veličina za vodu ϵ_r i n za vodu (većina tablica navodi $\epsilon_r \approx 80$, odnosno $n \approx 1.33$); na frekvencijama vidljive svjetlosti ϵ_r za vodu je puno manji i zbilja vrijedi relacija 9.1.

Činenjica da se indeks loma mijenja s valnom duljinom svjetlosti, odgovorna je za pojavu **disperzije** svjetlosti. Pod disperzijom podrazumijevamo razlaganje bijele svjetlosti (svjetlosti složene od elektromagnetskih valova različitih valnih duljina) na monokromatske komponente - ovaj efekt se manifestira npr. pri pojavi duge, a mi ćemo ga diskutirati u nastavku kod razmatranja optičke rešetke.

Pri sofisticiranijim razmatranjima (npr. na kolegiju "Klasična elektrodinamika") dozvoljava se da indeks loma bude kompleksan broj, radi uključivanja efekta apsorpcije. Nadalje, u modernim istraživanjima vrlo su zanimljiva sredstva (tzv. metamaterijali) negativnog indeksa loma - u okviru ovog kolegija indeks loma ćemo ipak smatrati realnim i pozitivnim brojem. Za sredstva većeg indeksa loma n, reći ćemo da su "optički gušća", a ako je indeks loma manji govorit ćemo o "optički rjeđim" sredstvima.

Kako se pri prijelazu iz vakuuma u dielektrik mijenjaju frekvencija i valna duljina svjetlosti? Titranje transmitiranog vala nastaje titranjem elektronskog oblaka atoma na graničnoj plohi, a to titranje nastaje djelovanjem upadnog vala - stoga transmitirani val titra **istom frekvencijom** ω kao i upadni val.

Kako se pri prelasku iz jednog sredstva u drugo ponaša valni broj (odnosno valna duljina), sada možemo proučiti na temelju disperzijske relacije; u vakuumu vrijedi:

$$\omega = ck_{\text{vak.}} \quad ,$$

dok je u dielektriku brzina manja za faktor n, pa vrijedi:

$$\omega = \frac{c}{n}k_{\text{diel.}} \quad .$$

Budući da su frekvencije u gornja dva izraza iste, izjednačavanjem dobivamo:

$$k_{\text{diel.}} = nk_{\text{vak.}} \quad .$$

Odavdje se za odnos valnih duljina dobiva:

$$\frac{2\pi}{\lambda_{\text{diel.}}} = n\frac{2\pi}{\lambda_{\text{vak.}}} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{\text{diel.}} = \frac{\lambda_{\text{vak.}}}{n} \quad .$$

Valni se broj u dielektriku povećava u odnosu na vakuum za faktor n, a valna duljina postaje kraća za faktor n.

9.1.1 Polarizacija svjetlosti

Elektromagnetski valovi nastali na način opisan u prošlom poglavlju (dakle, oko prijenosnih linija ili npr. antena) imaju uvijek isti pravac titranja električnog, odnosno magnetskog polja. Za svjetlost s tim svojstvom kažemo da je **linearno polarizirana**. Kao smjer polarizacije dogovorno biramo smjer titranja električnog polja. S druge strane, izvori poput Sunca i žarulja emitiraju svjetlost na drugačiji način (o toplinskom zračenju govorit ćemo na "Općoj fizici 4") - svjetlost koja dolazi s takvih tijela nije monokromatska (sastoji se od elektromagnetskih valova različitih valnih duljina), a nema ni jedinstven smjer titranja polja u vremenu; za takvu svjetlost kažemo da je **nepolarizirana**. Titranje kod nepolarizirane svjetlosti dešava se u svim smjerovima podjednako, no samo su dva smjera linearno nezavisna - svi ostali se mogu napisati kao njihova linearna kombinacija.

Osim linearne polarizacije, u praksi je važna i **cirkularna polarizacija** elektromagnetskih valova. Svjetlost je cirkularno polarizirana ako električno polje putujućeg vala u vremenu ne mijenja svoj iznos, već samo smjer (na način da vektor smjera jednoliko kruži). Cirkularno polarizirane valove dobivamo npr. pomoću dvije okomito položene antene u kojima naboji sinkronizirano titraju, ali s razlikom u fazi jedne antene prema drugoj od $\pi/2$ (ovo je slično dobivanju kružnice kao Lissajouseve krivulje, vidi sliku 5.4).

Kako se od nepolarizirane svjetlosti dobiva polarizirana? Jedan je način polarizacije svjetlosti prolaženje zrake kroz snažna nesimetrična električna polja u kristalima (npr. kalcitu). Zbog nesimetrične strukture kristala, kod njih svjetlost različitih smjerova polarizacije ima različit indeks loma - ta se pojava naziva *dvolom*. Takvi se kristali stoga koriste kao tzv. polarizatori - uz navedeni različit lom zraka različite polarizacije, polarizator je napravljen tako da se jedna od polarizacija nakon loma odstrani npr. totalnom refleksijom. Osim kristala, slična polarizacijska svojstva pokazuju mnogi umjetno napravljeni organski materijali (npr. polaroid) i danas su oni puno češći u praksi (kod njih se "nepoželjna polarizacija" apsorbira na dugim linearnim molekulama).

Drugi način polarizacije svjetlosti je jednostavna refleksija - dvije različito polarizirane zrake (u ravnini refleksije i okomito na nju) reflektiraju se s različitim koeficijentima refleksije, $R_{\perp}$ i $R_{\|}$. Prije nastavka diskusije polarizacije nađimo eksplicitno izraze za te koeficijente refleksije.

9.1.2 Fresnelove relacije

Pogledajmo ponašanje svjetlosti na granici dva sredstva. Ako svjetlost iz vakuuma upada na dielektrik, dešava se i refleksija i transmisija vala zbog promjene na graničnoj plohi. Ako svjetlost upada okomito na graničnu plohu, koeficijent refleksije dan je, kao i općenito za bilo kakav val, jednostavno s:

$$R = -\frac{Z_{\text{vak.}} - Z_{\text{diel.}}}{Z_{\text{vak.}} + Z_{\text{diel.}}} = -\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1-n}{n+1} \quad . \tag{9.2}$$

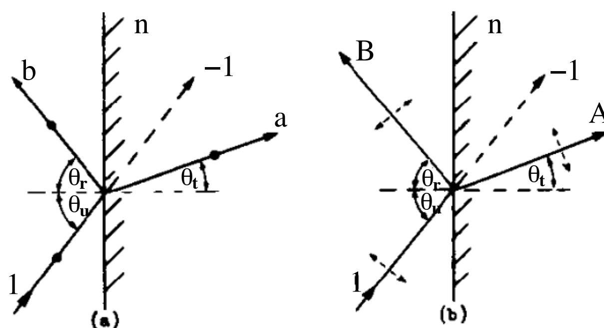
Za koeficijent transmisije stoga vrijedi:

$$T = 1 + R = \frac{2}{n+1} \quad .$$

Na primjer, pri prijelazu iz vakuuma (ili zraka) u staklo (n=1.5), vrijedi: R=-0.2 i T=0.8.

Ako svjetlost ne upada okomito na graničnu površinu, koeficijenti refleksije i transmisije postaju bitno kompliciraniji. Štoviše, isti će ovisiti o smjeru titranja električnog (odnosno magnetskog) polja, odnosno polarizaciji (detaljno ćemo ju diskutirati u sljedećem potpoglavlju). Kao i kod mehaničkih valova, valni vektori upadnog, reflektiranog i transmitiranog vala nalazi se u istoj ravnini (to se i dokazuje na posve analogan način).

Izvedimo sada eksplicitno[1] koeficijente refleksije i transmisije za svaki od dva nezavisna smjera polarizacije (slika 9.1). Da maksimalno pojednostavimo zapis u izvodu (te oznake na slici), pretpostavit ćemo da upadni val ima jediničnu amplitudu; nadalje, amplitude reflektiranog i transmitiranog vala označit ćemo s b i a u slučaju polarizacije okomite na ravninu refleskije, odnosno s B i A kada je polarizacija (tj. smjer električnog polja) u ravnini refleksije. Na kraju, pretpostavit ćemo da se upadni val giba u vakuumu (n=1), te pada na sredstvo indeksa loma n - jednom kada izvedemo tražene koeficijente, neće ih biti teško poopćiti na proizvoljnu situaciju.



Slika 9.1: Upadni val jedinične amplitude reflektira se i trasnmitira na granici dva sredstva (indeksa loma 1 i n). Lijevo je dana situacija kada je upadni val linearno polariziran okomito na ravninu refleksije, dok je desno polarizacija u ravnini refleksije.

[1]Ovaj pomalo "nestandardan" izvod preuzet je iz knjige: Richard Feynman, "*Lectures in Physics I*", Addison-Wesley Publishing Company, 1964.

Reflektirani i transmitirani val nastaju gibanjem naboja u mediju indeksa loma n. Kada tih naboja (odnosno medija) i njegovog gibanja ne bi bilo, upadni bi se val nastavio širiti po crtkanoj liniji na slici 9.1. Drugim riječima, gibanje naboja u mediju indeksa loma n odgovorno je ne samo za nastanak reflektiranog i transmitiranog vala, već i za nastanak vala amplitude -1 koji u potpunosti poništava upadni val duž crtkane linije.

I reflektirani i transmitirani val nastaju uvijek gibanjem jednih te istih naboja u mediju - očekujemo da među njima postoji nekakva jednostavna proporcionalnost. Je li možda omjer amplituda b/a jednak omjeru B/A? Odgovor je: ne, to ne smijemo očekivati jer je očito sa slike 9.1 da reflektirani i transmitirani val imaju jednak smjer polarizacije na lijevom dijelu slike, dok tomu nije tako na desnoj strani. Drugim riječima, proporcionalnost na desnoj strani slike očekujemo između amplitude B i komponente amplitude A transmitiranog vala projicirane na smjer širenja reflektiranog vala:

$$-A\cos(\pi - \theta_r - \theta_t) = A\cos(\theta_u + \theta_t) \quad ;$$

tek tada na desnoj strani slike postižemo analogne uvjete kao na lijevoj. Stoga možemo pisati:

$$\frac{b}{a} = \frac{B}{A\cos(\theta_u + \theta_t)} \quad . \tag{9.3}$$

Sličnu logiku koristimo u uspoređivanju valova amplituda a i -1, odnosno A i -1. Budući da isti naboji stvaraju transmitirani val i val koji poništava upadni, očekujemo proporcionalnost između odgovarajućih amplituda - u desnom slučaju na slici 9.1 opet moramo u obzir uzeti samo odgovarajuću projekciju, pa dobivamo:

$$\frac{a}{-1} = \frac{A\cos(\theta_u - \theta_t)}{-1} \quad . \tag{9.4}$$

Množenjem izraza 9.3 i 9.4 dobivamo:

$$b = B \cdot \frac{\cos(\theta_u - \theta_t)}{\cos(\theta_u + \theta_t)} \quad . \tag{9.5}$$

Još samo trebamo iskoristiti zakon očuvanja energije, odnosno činjenicu da da suma kvadrata amplituda reflektiranog i transmitiranog vala daje kvadrat amplitude upadnog vala (1); uvrstimo li izraze 9.4 i 9.5 u:

$$\frac{1 - B^2}{1 - b^2} = \frac{A^2}{a^2} \quad ,$$

dobivamo:

$$\frac{1 - b^2 \frac{\cos^2(\theta_u + \theta_t)}{\cos^2(\theta_u - \theta_t)}}{1 - b^2} = \frac{1}{\cos^2(\theta_u - \theta_t)} \quad ,$$

$$\cos^2(\theta_u - \theta_t) - b^2\cos^2(\theta_u + \theta_t) = 1 - b^2 \quad ,$$

$$b^2 - b^2\cos^2(\theta_u + \theta_t) = 1 - cos^2(\theta_u - \theta_t) \quad ,$$

$$b^2\sin^2(\theta_u + \theta_t) = \sin^2(\theta_u - \theta_t) \quad ,$$

$$b^2 = \frac{\sin^2(\theta_u - \theta_t)}{\sin^2(\theta_u + \theta_t)} \quad .$$

Kombiniranjem s izrazom 9.2 dobivamo i:

$$B^2 = b^2 \cdot \frac{\cos^2(\theta_u + \theta_t)}{\cos^2(\theta_u - \theta_t)} = \frac{\sin^2(\theta_u - \theta_t)}{\sin^2(\theta_u + \theta_t)} \cdot \frac{\cos^2(\theta_u + \theta_t)}{\cos^2(\theta_u - \theta_t)} = \frac{\mathrm{tg}^2(\theta_u - \theta_t)}{\mathrm{tg}^2(\theta_u + \theta_t)} \quad .$$

Da bi bili u skladu s izrazom 9.2, pri vađenju korijena u ova dva dobivena izraza uzimamo negativan predznak, te konačno dobivamo:

$$b = -\frac{\sin(\theta_u - \theta_t)}{\sin(\theta_u + \theta_t)} \quad , \tag{9.6}$$

$$B = -\frac{\mathrm{tg}(\theta_u - \theta_t)}{\mathrm{tg}(\theta_u + \theta_t)} \quad . \tag{9.7}$$

Pokažimo još kako dobiveni rezultat transformirati pomoću Snellovog zakona (na koji ćemo se vratiti u sljedećem potpoglavlju):

$$\sin\theta_u = n\sin\theta_t \quad .$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned} b &= -\frac{\sin(\theta_u - \theta_t)}{\sin(\theta_u + \theta_t)} = \\ &= -\frac{\sin\theta_u\cos\theta_t - \sin\theta_t\cos\theta_u}{\sin\theta_u\cos\theta_t + \sin\theta_t\cos\theta_u} = \\ &= -\frac{n\sin\theta_t\cos\theta_t - \sin\theta_t\cos\theta_u}{n\sin\theta_t\cos\theta_t + \sin\theta_t\cos\theta_u} = \\ &= \frac{\cos\theta_u - n\cos\theta_t}{\cos\theta_u + n\cos\theta_t} \quad . \end{aligned}$$

Na analogan način raspisujemo amplitudu B, a zatim i amplitude a i A (navedeni su raspisi komplicirani, a ne daju nam ništa konceptualno novo). Budući da smo razmatrali upadni val amplitude 1, dobiveni koeficijenti b i B upravo su jednaki koeficijentima refleksije za dvije različite polarizacije upadnog vala:

$$R_\perp = \frac{b}{1} = b \quad , \quad R_\parallel = \frac{B}{1} = B \quad .$$

Dozvolimo li upadnom mediju da bude različit od vakuuma, dobivene relacije konačno možemo općenito napisati kao:

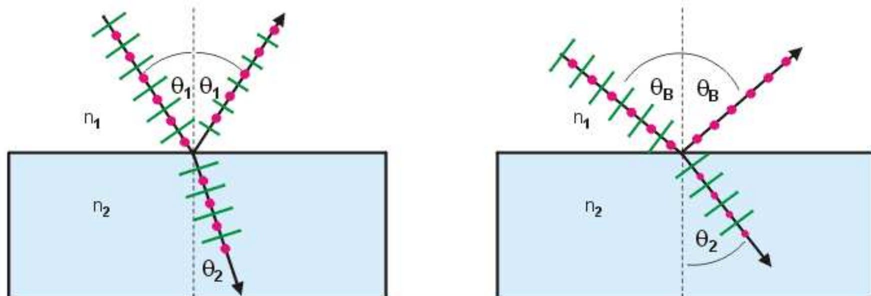
$$R_\perp = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0u}}\right)_\perp = \frac{n_1\cos\theta_u - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_u + n_2\cos\theta_t} \quad , \tag{9.8}$$

$$T_\perp = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0u}}\right)_\perp = \frac{2n_1\cos\theta_u}{n_1\cos\theta_u + n_2\cos\theta_t} \quad , \tag{9.9}$$

$$R_\parallel = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0u}}\right)_\parallel = \frac{n_2\cos\theta_u - n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_u + n_1\cos\theta_t} \quad , \tag{9.10}$$

$$T_\parallel = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0u}}\right)_\parallel = \frac{2n_1\cos\theta_u}{n_2\cos\theta_u + n_1\cos\theta_t} \quad . \tag{9.11}$$

Relacije 9.8-9.11 nazivaju se **Fresnelovim relacijama**[2]. Ako nas zanima koji dio intenziteta upadne svjetlosti se reflektira, dobivene koeficijente treba kvadrirati (jer je intenzitet proporcionalan s E^2), a za transmisiju i korigirati za promjenu brzine.



Slika 9.2: Polarizacija svjetlosti refleksijom.

[2]Augustin-Jean Fresnel (1788-1827), francuski fizičar.

Vratimo se sada na problem polarizacije nepolarizirane svjetlosti pri refleksiji. Iz Fresnelovih relacija 9.8-9.11 jasno je da se dvije različito polarizirane zrake (u ravnini refleksije i okomito na nju) reflektiraju različitim koeficijentima refleksije, $R_\perp$ i $R_\|$. Jače se reflektira ona polarizacija kod koje je smjer titranja okomit na ravninu refleksije/transmisije (vidi sliku 9.2 lijevo). Štoviše, iz Fresnelovih relacija lako se vidi da postoji kut pod kojim je $R_\|$=0. Taj se kut naziva Brewsterovim; ako nepolarizirana svjetlost pod njim pada na graničnu plohu, nakon refleksije bit će posve polarizirana (slika 9.2 desno). Nađimo Brewsterov kut pomoću izraza 9.7:

$$R_\| = B = -\frac{\mathrm{tg}(\theta_u - \theta_t)}{\mathrm{tg}(\theta_u + \theta_t)} \quad .$$

Brojnik dobivenog izraza može biti jednak nuli samo kada su kutovi θ_u i θ_t jednaki, a to se postiže samo kada svjetlost pada okomito na graničnu površinu. No tada su oba ta kuta jednaka nuli, pa je i nazivnik gornjeg izraza nula (a koeficijent refleksije različit od nule). Jedini način da dobiveni izraz bude jednak nuli stoga je slučaj kada je nazivnik beskonačan, a to se postiže kada je argument funkcije tangens jednak 90°:

$$\theta_u + \theta_t = 90^\circ \quad .$$

Kombiniranjem tog uvjeta sa Snellovim zakonom, dobivamo za Brewsterov kut (upadni kut tada označavamo s θ_{Br}):

$$n_1 \sin\theta_{\mathrm{Br}} = n_2 \sin(90^\circ - \theta_{\mathrm{Br}}) \quad ,$$

$$\mathrm{tg}\ \theta_{\mathrm{Br}} = \frac{n_2}{n_1} \quad .$$

Brewsterov kut za prijelaz svjetlosti iz zraka u staklo jednak je ≈56°, a za prijelaz iz zraka u vodu ≈53°.

Naglasimo još da je nemoguće postići to da drugi koeficijent refleksije, $R_\perp$, bude jednak nuli. S druge strane, može se pokazati da su za kutove veće od kritičnog (str. 136), oba koeficijenta transmisije jednaka nuli.

9.2 Aproksimacija geometrijske optike

Ravan elektromagnetski val u vakuumu ili dielektriku je idealizacija koja podrazumijeva beskonačne ravnine kao valne fronte. Vektori $\vec{E}$ i $\vec{B}$ okomiti su na $\vec{k}$, tj. leže u ravnini valne fronte. Kao što smo vidjeli u prošlom poglavlju, u nekoj točki (karakteriziranoj vektorom $\vec{r}$) u nekom trenutku t, polja su dana s:

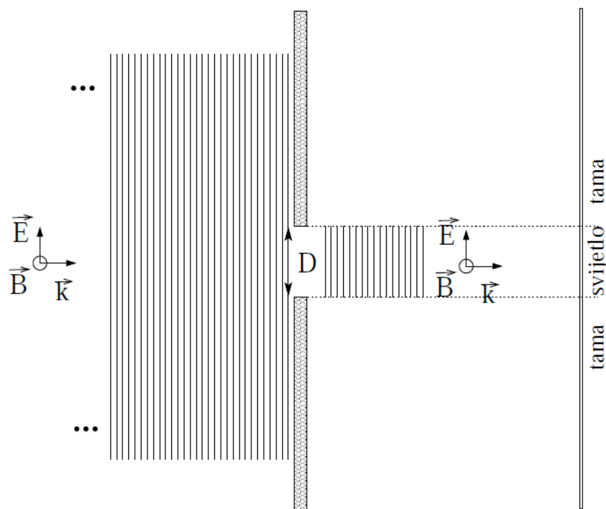
$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) \quad ,$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \sin\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) \quad .$$

Amplitude $\vec{E}_0$ i $\vec{B}_0$ u ovim izrazima ne ovise o $\vec{r}$ i t. Sve u svemu, za ravni val se može reći da se širi strogo pravocrtno u smjeru valnog vektora $\vec{k}$. Međutim, u realnosti nikad nemamo valne fronte koje su beskonačne ravnine, valni vektor $\vec{k}$ u različitim točkama valne fronte pokazuje u različitim smjerovima - kada onda možemo govoriti o (približno) pravocrtnom širenju svjetlosti? Razmotrimo ovaj problem na dva primjera.

I) Svjetlost koja prolazi kroz maleni otvor.

Naka svjetlost koja je ravni val upada na otvor koji je mnogo veći od valne duljine te svjetlosti ($D \gg \lambda$), kao na slici 9.3. Nakon prolaska kroz otvor, možemo smatrati da je snop svjetlosti i dalje



Slika 9.3: Prolazak svjetlosti kroz otvor, uz $D \gg \lambda$.

približno ravan val (jer je karakteristična veličina valnih fronti i dalje puno veća od njihovog razmaka), koji se širi u dobro definiranom smjeru (smjeru valnog vektora $\vec{k}$).

Situaciju poput ove na slici 9.3 možemo realizirati s otvorom ("pukotinom") širine npr. $D = 5$ mm - za tipičnu valnu duljinu vidljive svjetlosti ($\lambda = 500$ nm), tada vrijedi $D = 10^4\lambda$, pa je ispunjen uvjet $D \gg \lambda$. Uočite da je na slici 9.3 omjer širine pukotine D i razmaka među susjednim valnim frontama puno manji, jer bi u protivnom slika postala posve nepregledna. Pravilniji omjer možemo zamisliti pretpostavljajući da na slici nismo ucrtali svaku valnu frontu, već npr. tek svaku stotu ili čak tisućitu.

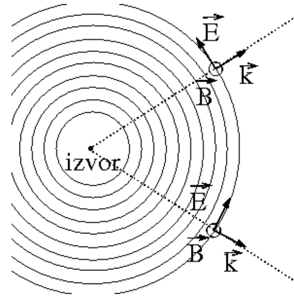
Na zastoru, koji je postavljen na nekoj (velikoj) udaljenosti iza otvora, u ovom slučaju vidimo svijetlo područje koje odgovara širini pukotine D. Rub tog svijetlog područja (prema tamnim područjima) je oštar gleda li se na skali karakteriziranoj širinom pukotine D. Ovakvo ponašanje svjetlosti, u limesu $D \gg \lambda$, nazivamo **geometrijskom optikom** - u toj aproksimaciji podrazumijevamo da se svjetlost širi pravocrtno. Zakone geometrijske optike navest ćemo i detaljno proučiti u sljedećem potpoglavlju.

II) Svjetlost iz točkastog izvora.

Svaki realan izvor svjetlosti ima konačnu dimenziju, pa se na udaljenostima koje su mnogo veće od dimenzija izvora čini da je izvor točkast. Valne fronte tada očito nisu ravnine, već sfere. Stoga valni vektori $\vec{k}$ imaju različite smjerove u raznim točkama iste valne fronte; isto vrijedi i za polja $\vec{E}$ i $\vec{B}$ (vidi sliku 9.4). Međutim, ograničimo li se na dovoljno uzak snop svjetlosti (širine D) na dovoljno velikoj udaljenosti L od izvora, valne fronte se mogu aproksimirati isječcima ravnina, pa val možemo smatrati ravnim. Dakako, pri tome mora vrijediti $D \gg \lambda$.

Na primjer, za snop širine $D = 0.5$ mm na udaljenosti $L = 0.5$ m od izvora, vrijedi $D/L = 10^{-3}$, pa su valne fronte unutar snopa približno ravne. Istodobno, za vidljivu svjetlost s $\lambda = 500$ nm vrijedi $D/\lambda = 10^3$, pa je ispunjen i zahtjev iz uvjeta I). Zaključujemo da i za ovakav snop svjetlosti možemo reći da se širi pravocrtno, tj. da je za njega valni vektor $\vec{k}$ uvijek istog smjera.

Od izvora svjetlosti možemo zamišljati mnoštvo uskih snopova u raznim smjerovima (i stoga s različitim valnim vektorima $\vec{k}$). Aproksimacija geometrijske optike zamjenjuje svaki takav dovoljno uzak ($D \ll L$) i dovoljno širok ($D \gg \lambda$) snop svjetlosti jednom **zrakom** svjetlosti kao zamišljenim



Slika 9.4: Svjetlost iz točkastog izvora.

pomoćnim alatom - smjer širenja te zrake svjetlosti jednak je smjeru valnog vektora $\vec{k}$ dotičnog snopa.

9.3 Zakoni geometrijske optike

Zakoni geometrijske optike su niz pravila kojima opisujemo put zrake svjetlosti. Njih izvodimo iz valne prirode svjetlosti, uz uvažavanje gore diskutiranih aproksimacija koje definiraju limes geometrijske optike.

9.3.1 Prvi zakon geometrijske optike

Unutar limesa geometrijske optike (definiranih u prošlom potpoglavlju) svjetlost se širi pravocrtno u danom optičkom sredstvu. Promjene smjera širenja svjetlosti moguće su samo na granici dvaju optičkih sredstva.

9.3.2 Drugi zakon geometrijske optike

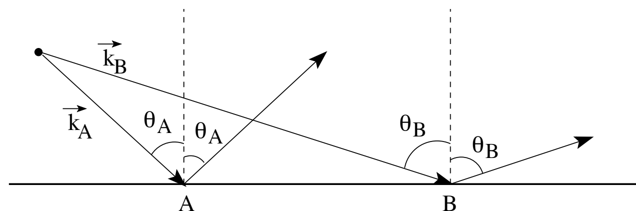
Drugi zakon geometrijske optike odnosi se na odbijanje (refleksiju) svjetlosti: do refleksije dolazi uvijek kada svjetlost naiđe na promjenu impedancije valnog (optičkog) sredstva. Impedancije valnih sredstava određuju koeficijente refleksije i transmisije. Određivanje smjera reflektiranog i transmitiranog vala temelji se na odnosima valnih vektora. Za elektromagnetske ravne valove vrijedi isto što smo zaključili za mehaničke u poglavlju 5.6 (uz zamjenu $\sqrt{T/\rho}{\rightarrow}c/n$).

Ako na neku graničnu plohu upada *ravni val*, tada se, zbog njegove beskonačnosti, refleksija zbiva u svim točkama granične plohe na isti način. Valni je vektor $\vec{k}_u$ isti za cijeli upadni val, kao što je i $\vec{k}_r$ jednak za cijeli reflektirani val. Kao i u mehaničkom slučaju, vrijedi zakon refleksije (izraz 5.17):

$$\theta_u = \theta_r \quad .$$

Kut upada (θ_u) i kut refleksije (θ_r) se mjere od okomice na graničnu plohu do smjera valnog vektora.

Što se zbiva ako upadni val nije ravan? Uzmimo npr. točkasti izvor svjetlosti na konačnoj udaljenosti od ravnine refleksije, kao na slici 9.5. Primijenimo aproksimaciju geometrijske optike. Od izvora prema točki A uzmemo uzak snop svjetlosti unutar kojeg su valne fronte približno isječci ravnina, a valni vektor je jednak $\vec{k}_A$. Snop je makroskopski gledano uzak, ali mu je širina ipak puno veća od valne duljine svjetlosti. U točkama granične plohe oko A do releksije odlazi približno kao



Slika 9.5: Refleksija svjetlosti koja se širi iz točkastog izvora.

za ravni val: upadni kut i kut refleksije su jednaki (θ_A).

Za refleksiju u okolini točke B na graničnoj plohi, moramo uzeti drugi uzak snop svjetlosti koji se ponaša približno kao ravan val s valnim vektorom $\vec{k}_B$. Upadni kut i kut refleksije su jednaki i u točki B (označili smo ih s θ_B). Proceduru bi mogli nastaviti i uzimati po volji daljnje točke C, D, ... u ravnini refleksije. U aproksimaciji geometrijske optike zamjenjujemo sve odgovarajuće uske snopove s zrakama svjetlosti kao pomoćnim geometrijskim tvoreninama. Drugi zakon geometrijske optike jednostavno kaže da se sve zrake reflektiraju pod istim kutem pod kojim su i upale na graničnu plohu (kutovi se računaju od okomice na graničnu plohu za svaku zraku zasebno).

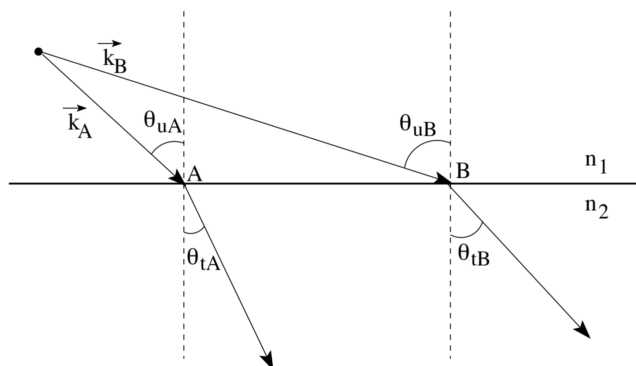
Ako je granična ploha ravna ili blago zakrivljena, upadni kut će se sporo mijenjati kako se pomičemo duž plohe. Ako je granična ploha vrlo neravna (hrapava) i to na skali usporedivoj s valnom duljinom svjetlosti, tada nemamo dobro definiran smjer refleksije u nekoj točki (jer je nemoguće uzeti dovoljno širok snop za koji bi upadni kut bio više manje konstantan). U takvoj situaciji nastaje **difuzna svjetlost** (upotrebljava se još i izraz "rasuta svjetlost"), odnosno svjetlost koja se reflektira podjednako u svim smjerovima od neke plohe.

9.3.3 Treći zakon geometrijske optike

Treći zakon geometrijske optike odnosi se na određivanje smjera širenja transmitirane svjetlosti. Opet ćemo iskoristiti razultat dobiven za mehaničke valove u poglavlju 5.6, uz zamjenu $\sqrt{T/\rho}\rightarrow c/n$. Za ravne svjetlosne valove pri prelasku iz sredstva s indeksom loma n_1 u sredstvo s indeksom loma n_2 dobivamo:

$$\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_u} = \frac{n_1}{n_2} \quad . \tag{9.12}$$

Ovaj se izraz naziva **Snellovim zakonom loma**. Kod ravnih se valova svjetlost lomi u svakoj točki granične ravnine na jednak način (θ_u i θ_t su posvuda isti).

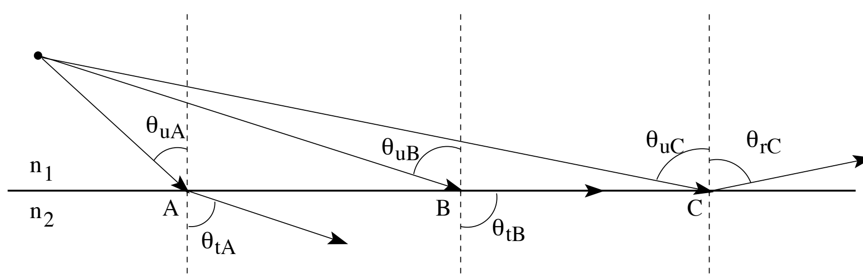


Slika 9.6: Transmisija svjetlosti koja se širi iz točkastog izvora (kada je n_1<n_2).

Pogledajmo kako opisati lom svjetlosti za valove koji nisu ravni. Uzmimo opet za primjer točkasti izvor svjetlosti na konačnoj udaljenosti od granične ravnine (slika 9.6). Po analogiji s prethodnim razmatranjem refleksije, odabiremo uske snopove svjetlosti unutar kojih vrijedi aproksimacija geometrijske optike. Na svaki takav snop (i odgovarajuću zraku) primjenjujemo Snellov zakon - zraka svjetlosti koja prelazi iz optički rjeđeg u optički gušće sredstvo (n_1<n_2) lomi se prema okomici. Proceduru nastavljamo izborom proizvoljnog broja točaka na graničnoj plohi i razmatarnjem što se dešava sa svakom od zraka (to ćemo mi napraviti na više primjera u nastavku poglavlja). Ako je granična ploha hrapava na skali usporedivoj s valnom duljinom svjetlosti, aproksimacija geometrijske optike prestaje biti primjenjiva, a u transmisiji se dobiva difuzna svjetlost.

Pogledajmo još i slučaj kada svjetlost prelazi iz optički gušćeg sredstva u optički rjeđe (n_2<n_1). Svaka se zraka tada lomi od okomice, tj. kut loma veći je od upadnog. Ako npr. imamo svjetlost iz točkastog izvora i dovoljno veliku graničnu plohu, na njoj će postojati točka (označena s "B" na slici 9.7) za koju je upadni kut dovoljno velik, da kut loma postane pravi (θ_t= 90°). Taj se upadni kut naziva *kritičnim upadnim kutem*; za njega vrijedi:

$$\frac{\sin\theta_{\text{krit.}}}{\sin 90°} = \frac{n_2}{n_1} \qquad \Rightarrow \qquad \sin\theta_{\text{krit.}} = \frac{n_2}{n_1} \quad .$$



Slika 9.7: Transmisija svjetlosti koja se širi iz točkastog izvora (za slučaj n_1>n_2).

Za kutove manje od kritičnog (θ_u<$\theta_{\text{krit.}}$), svjetlost prelazi u optički rjeđe sredstvo i lomi se od okomice prema Snellovom zakonu (točka "A" na slici 9.7). Za kutove veće od kritičnog (θ_u>$\theta_{\text{krit.}}$), nema transmisije svjetlsoti, već se sva svjetlost reflektira - ova se pojava naziva **totalna refleksija** (vidi i str. 136).

Demonstracijski pokus 9.1: Hartlova ploča za vizualiziranje svjetlosnih zraka.

Važno uočiti: pravocrtno širenje svjetlosti; zakon refleksije, zakon loma svjetlosti, totalna refleksija.

9.4 Nastanak slike u geometrijskoj optici

U geometrijskoj optici *predmetom* (ili objektom) se naziva bilo koje tijelo od kojeg se (iz njegovih pojedinih točaka) šire divergentni snopovi svjetlosti. Svjetlost se iz predmeta ponekad širi na sve strane (u puni prostorni kut), a ponekad samo u ograničeni smjer (konkretan prostorni kut). Predmet je, dakle, izvor svjetlosti koju dalje razmatramo u geometrijskoj optici. Razlikujemo primarne i sekundarne izvore svjetlosti - prvi svjetlost stvaraju iz nekog drugog oblika energije, dok drugi svjetlost reflektiraju (često i difuzno). Zrcala i leće ne smatramo predmetima u geometrijskoj

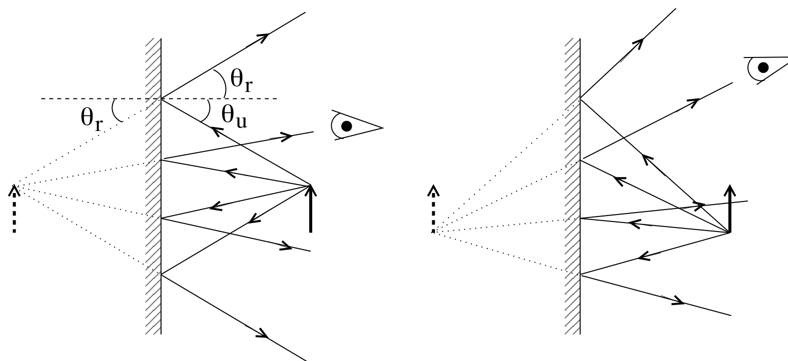
optici, nego instrumentima za stvaranje slike.

U osvjetljenoj prostoriji svjetlost se višestruko difuzno reflektira na zidovima, namještaju itd. S predmeta koji se nalazi u takvoj prostoriji svjetlost će se širiti iz *svake točke* na njegovoj površini u *svim mogućim smjerovima*. Čovjek neki predmet vidi tako što u njegovo oko dolazi poneka zraka s različitih točaka na površini predmeta. Pomoću instrumenata geometrijske optike (zrcala i leće), može se konstruirati *slika* nekog predmeta. Ako je predmet točkast, onda će idealan optički instrument napraviti i točkastu sliku. Ako optički instrument ne napravi točkastu, već razmazanu sliku, govorimo o "astigmatizmu". O toj i drugim nesavršenostima optičkih instrumenata neće biti riječi u ovom kolegiju.

Realni predmeti najčešće imaju neku veličinu u prostoru, pa ih u optici tretiramo kao mnoštvo točkastih predmeta - optički instrumenti od svake točke predmeta naprave sliku u obliku točke na nekom (drugom) mjestu u prostoru. Skup svih točkastih slika predstavlja cjelokupnu sliku predmeta, kojoj možemo pridjeliti konkretan položaj i veličinu u prostoru. Nastanak slike i njena svojstva razmatrat ćemo u nastavku poglavlja na nekoliko primjera.

9.4.1 Nastanak slike na ravnom zrcalu

Razmotrimo kao prvi primjer neki predmet ispred ravnog zrcala. Zrcalo je općenito neka glatka površina koja savršeno reflektira svjetlost - u prošlosti su se zrcala izrađivala tako da je površina nekog metala jednostavno ispolirana tako da bude što ravnija, dok se danas zrcala izrađuju nanošenjem tankog reflektirajućeg sloja (od srebra ili aluminija) na stražnju stranu deblje glatke ploče od stakla (to je i jeftinije, a metal koji se koristi je zaštićen od korozije). Pred zrcalo koje je u ovom primjeru savršeno ravno stavimo neki predmet - recimo da je u pitanju lampa (dakle, primarni izvor) u obliku strelice, kao na slici 9.8.



Slika 9.8: Nastanak slike na ravnom zrcalu.

Svaka točka lampe (strelice) je izvor svjetlosti u svim smjerovima - lampa je, dakle, u jeziku optike "predmet". Pogledajmo prvo zrake svjetlosti koje izlaze is vrha strelice (slika 9.8 lijevo). Te zrake su divergentne, pružaju se u svim smjerovima iz promatrane točke. Ako se negdje s iste strane zrcala nalazi promatrač (shematski nacrtano oko na slici 9.8), neke od zraka s vrha predmete dolazit će direktno do tog oka (čovjek će predmet vidjeti).

Nas zanimaju zrake koje će do oka doći nakon refleksije od zrcala. Iz vrha predmeta na zrcalo (za koje pretpostavljamo da je savršeno ravno) pada mnoštvo zraka svjetlosti - kutovi upada θ_u za pojedine zrake se razlikuju, no zrake se uvijek odbijaju po zakonu refleksije (θ_r=θ_u), kao što je i prikazano za najgornju zraku ucrtanu na sliku 9.8.

Reflektirane zrake možemo zamišljeno produljiti pravcem koji se proteže i na drugu stranu zrcala. Napravimo li to za veći broj zraka, nalazimo da se svi ti produženi pravci sijeku u točki koja je s obzirom na zrcalo u simetričnom položaju prema vrhu predmeta, tj. nalazi se na jednakoj udaljenosti od zrcala, a pravac koji ih spaja je okomit na površinu zrcala. Ova činjenica slijedi iz sukladnosti zamišljenih trokuta na lijevoj i desnoj strani zrcala. **Zaključujemo**: sve zrake svjetlosti koje su iz vrha predmeta putovale prema zrcalu, odbile su se od njega i nastavile svoj put kao da su došle iz simetrične točke s druge strane zrcala - ta se točka naziva **slika** točke predmeta koju smo proučavali (vrha strelice). Promatraču se, dakle, čini da zrake u njegovo oko dolaze s mjesta na kojem smo gore opisanim postupkom konstruirali sliku.

Analogno razmatranje možemo napraviti i za neku drugu točku predmeta, recimo za najdonju točku strelice (slika 9.8 desno) - i njoj s druge strane zrcala nakon produljivanja zraka pridružujemo simetričnu točku. Isto se može zaključiti za svaku točku predmeta, pa predmet kao cjelinu preslikavamo u simetričnu sliku s druge strane zrcala, kao što je i ucrtano na oba dijela slike 9.8. Ništa se bitno ne bi promijenilo da je predmet koji razmatramo nagnut u odnosu na zrcalo - njegovu sliku bi dobili na drugoj strani zrcala simetričnim preslikavanjem ("zrcaljenjem").

Pogledajmo svojstva slike dobivene ravnim zrcalom. Kao prvo, za tu sliku kažemo da je *imaginarna* ili *virtualna*, čime naglašavamo da nju ne možemo vidjeti stavljanjem zastora na njezinu lokaciju. Naime, ako zastor postavimo na mjesto imaginarne slike, na njemu se neće pojaviti apsolutno ništa jer lijevo od zrcala zrake svjetlosti uopće ne dolaze (na površini zrcala reflektirale su se natrag udesno). Imaginarnu sliku možemo vidjeti samo gledajući izravno okom - u oko dolazi reflektirana zraka, ali se čini kao da je ta zraka došla iz točke u kojoj je imaginarna slika.

Vrijedi još naglasiti da iz imaginarne slike (prividno) izlazi divergentan snop svjetlosti baš kao što je to slučaj i s realnim predmetom (objektom). Da dobijemo prostornu informaciju o položaju objekta (ili slike), poželjna je upotreba dva oka. Imaginarnu sliku možemo promatrati s bilo koje lokacije unutar reflektiranih snopova svjetlosti.

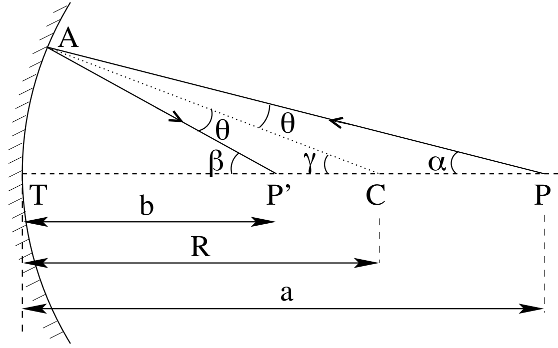
Druga važna svojstva slike dobivene ravnim zrcalom su to da je ona iste veličine kao i predmet (dakle, nije ni uvećana ni umanjena), te da je *uspravna*, a ne obrnuta (dakle, gornji dio strelice na slici 9.8 ostao je gore, a donji dio je ostao dolje). U nastavku ćemo vidjeti da kod sfernih zrcala i leća to općenito neće biti ispunjeno.

Demonstracijski pokus 9.2: slika u nepropusnom ravnom zrcalu; polupropusno ravno zrcalo i dvije svijeće.

Važno uočiti: nastanak i lokaciju slike; simetrično postavljajući svijeće oko polupropusnog zrcala postižemo to da "vidimo" plamen i na svijeći iza zrcala, iako smo ga upalili samo na svijeći ispred zrcala.

9.4.2 Nastanak slike na sfernom zrcalu

Sferna zrcala su zrcala kojima je površina ispolirana u obliku dijela sfere. Razlikujemo dvije vrste sfernih zrcala, **konkavna** ili udubljena (kod kojih je reflektirajuća površina zrcala na unutrašnjoj strani sfere) i **koveksna** ili ispupčana (kod kojih je reflektirajuća površina zrcala na vanjskoj strani sfere). Razmotrimo prvo konkavno zrcalo, prikazano na slici 9.9.



Slika 9.9: Nastanak slike na sfernom konkavnom zrcalu.

Centar sfere koja definira površinu sfernog zrcala nazivamo centrom zakrivljenosti zrcala (na slici 9.9 označen s "C"). Središnju točku zrcala nazivamo tjemenom (T). Pravac kroz centar zakrivljenosti C i tjeme T nazivamo *optičkom osi* sfernog zrcala (crtkan polupravac na slici 9.9). Neka je P jedna od točaka predmeta; iz nje izlazi divergentan snop zraka svjetlosti i pada na zrcalo na kojem se svaka zraka reflektira. Pogledajmo zraku koju iz točke P pada na zrcalo u točki A. Ako u njoj položimo tangentu na površini zrcala, onda je spojnica $\overline{\mathrm{CA}}$ okomita na nju (ta je spojenica zapravo polumjer sfere!). Stoga kut označen na slici s θ predstavlja kut upada (a time i kut refleksije).

Pogledajmo trokut PCA. Kut u tom trokutu uz vrh C jednak je $180°-\alpha-\theta$, jer suma kutova u trokutu mora biti jednaka 180°. S druge strane, taj je kut jednak $180°-\gamma$, pa izjednačavanjem dobivamo:

$$180° - \alpha - \theta = 180° - \gamma \qquad \Rightarrow \qquad \alpha + \theta = \gamma \quad .$$

Analognim razmatranjem trokuta PP'A dobiva se:

$$180° - \alpha - 2\theta = 180° - \beta \qquad \Rightarrow \qquad \alpha + 2\theta = \beta \quad .$$

Eliminacijom kuta θ iz gornjih dvaju jednadžbi dobiva se:

$$\alpha + \beta = 2\gamma \quad . \tag{9.13}$$

Uvedimo sada sljedeće oznake (vidi sliku 9.9):
a=$\overline{\mathrm{PT}}$, udaljenost predmeta od tjemena;
R=$\overline{\mathrm{CT}}$, polumjer zakrivljenosti sfernog zrcala;
b=$\overline{\mathrm{P'T}}$, udaljenost slike od tjemena.
Za kut γ (kada ga izrazimo u radijanima) vrijedit će egzaktno:

$$\gamma = \frac{\widehat{AT}}{R} \quad ,$$

gdje je $\widehat{AT}$ duljina luka između toǎka A i T na sfernom zrcalu. Taj isti luk može se povezati s kutevima α i β, no samo približno (jer centar zakrivljenosti luka *nije* u točkama P i P'):

$$\alpha \approx \frac{\widehat{AT}}{a} \qquad , \qquad \beta \approx \frac{\widehat{AT}}{b} \quad .$$

Ove su aproksimacije to bolje što su kutovi α i γ manji; dakle, što je točka A bliže tjemenu T (takve zrake nazivaju se "paraksijalnim"). Ako sferno zrcalo ima malen otvor u odnosu na polumjer, tada je navedena aproksimacija dobra za sve točke na zrcalu. Uvrstimo li sve tri relacije koje povezuju kutove i lukove u izraz 9.13, dobivamo:

$$\frac{\widehat{AT}}{a} + \frac{\widehat{AT}}{b} = 2\frac{\widehat{AT}}{R} \quad ,$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R} \quad . \tag{9.14}$$

Ova jednadžba ne sadrži više kutove koji se odnose na određenu točku A. To znači da ona vrijedi za releksiju u bilo kojoj točki sfernog zrcala, odnosno cijeli divergentni snop svjetlosti koji iz točke P pada na plohu sfernog zrcala. **Zaključujemo** da snop nakon refleksije postaje konvergentan i da se sve zrake sijeku u točki P' (na udaljenosti b od tjemena); u njoj se, dakle, nalazi slika predmeta iz točke P. Ta je slika *realna*, jer ju možemo vidjeti na zastoru koji bi postavili tako da prolazi točkom P'.

Ako se predmet postavi jako daleko ($a \rightarrow \infty$) od zrcala, tada iz izraza 9.14 vidimo da se njegova slika nalazi na udaljenosti $R/2$ od tjemena. Ta točka naziva se fokus ili žarište (F), a njena se udaljenost od tjemena naziva žarišna duljina f:

$$f = \frac{R}{2} \quad .$$

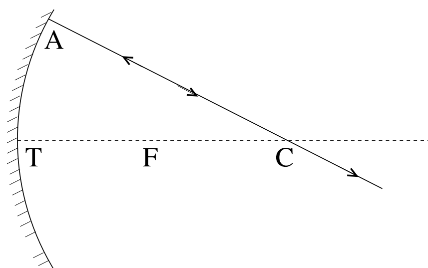
Uz ovu novu oznaku možemo napisati **jednadžbu sfernog zrcala**:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f} \quad . \tag{9.15}$$

Realan predmet nije točkast, već ima neku svoju veličinu. Iz svake njegove točke prostire se divergentan snop svjetlosti prema sfernom zrcalu i nakon refleksije nastaje konvergentan snop koji negdje daje realnu sliku. Skup svih točaka slike predstavlja ukupnu sliku koja, kao i predmet, ima svoju veličinu.

Radi maksimalno jednostavne konstrukcije položaja i veličine slike, poželjno je iskoristiti pravila za **karakteristične zrake**:

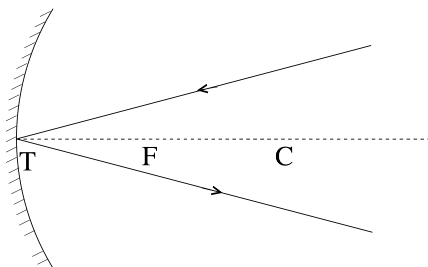
1) Svaka zraka koja prolazi kroz središte zakrivljenosti C (slika 9.10) i upada na sferno zrcalo i nekoj točki reflektira se istim putem natrag (jer je kut upada, a time i refleksije, jednak nuli - polumjer sfere okomit je na tangentu u točki njihovog dodira).



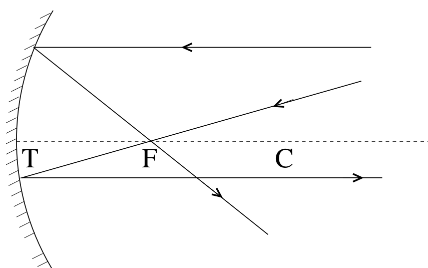
Slika 9.10: Prva karakteristična zraka za konstrukciju slike pomoću sfernog zrcala.

2) Svaka zraka koja upada na sferno zrcalo u točki tjemena T i tvori neki kut θ_u s optičkom osi (slika 9.11), reflektira se pod istim kutom ($\theta_r = \theta_u$) na drugu stranu optičke osi (jer je u tjemenu optička os okomica na površinu zrcala, pa je ovo pravilo zapravo direktna primjena zakona refleksije u geometrijskoj optici).

3) Svaka zraka koja upada na sferno zrcalo paralelno s optičkom osi, reflektira se tako da prolazi kroz fokus F. I obratno, svaka zraka koja pri upadu na sferno zrcalo prolazi kroz fokus, reflektira se paralelno optičkoj osi (slika 9.12). Ovo je pravilo jednostavno posljedica činjenice da zrake koje putuju paralelno optičkoj osi imaju svoj izvor (ili sliku) u beskonačnosti, pa iz definicije fokusa nakon (ili prije) refleksije moraju prolaziti kroz njega.



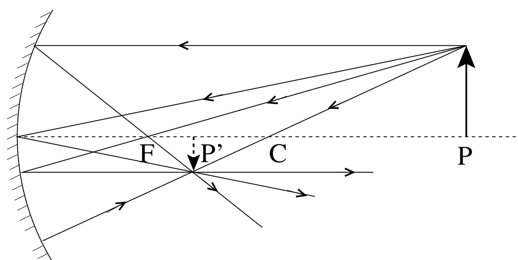
Slika 9.11: Druga karakteristična zraka za konstrukciju slike pomoću sfernog zrcala.



Slika 9.12: Treće karakteristične zrake za konstrukciju slike pomoću sfernog zrcala.

Općenito, za svaku zraku vrijedi da joj možemo obrnuti smjer: ako iz reflektiranog smjera pošaljemo zraku istim putem natrag na zrcalo, tada će se reflektirati duž onog smjera u kojem je prije upadala. Drugim riječima, upadna i reflektirana zraka čine vezani par smjerova koji vrijedi i kada se obrne smjer zraka.

Tri karakteristične zrake (odnosno četiri jer nam zadnje pravilo daje dvije) koristimo da bi konstruirali sliku nekog predmeta kao na slici 9.13.



Slika 9.13: Konstrukcija slike kod konkavnog sfernog zrcala (za slučaj $a>R$).

U principu, za pronalaženje pozicije slike bilo bi dovoljno iskoristiti dvije od četiri karakterističnih zraka ucrtanih na slici 9.13, te jednostavno naći njihovo sjecište - sve ostale zrake (i karakteristične i sve druge) moraju se nakon refleksije sjeći u istoj točki. Na slici 9.13 ucrtan je samo postupak kojim od vrha predmeta (strelice) dobivamo vrh slike; po istom smo postupku mogli naći sliku svake točke predmeta (i dobili bi ucrtanu srelicu na poziciji P').

Treba naglasiti da slika ne nastaje samo od karakterističnih zraka, već ju stvaraju *sve* zrake u snopu svjetlosti koje od kreću od predmeta i upadaju na sferno zrcalo (rubne zrake tog snopa definirane su rubovima zrcala). Zasjenimo li dio zrcala, slika će i dalje ostati istog oblika i na istom mjestu, smanjit će se samo njena osvjetljenost. Treba naglasiti i to da veličina sfernog zrcala može

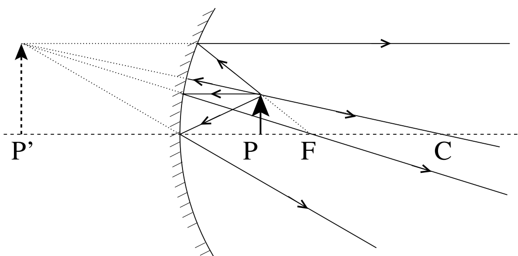
biti manja od predmeta, a da ipak nastaje cjelovita slika.

Komentirajmo još načine kako zapravo vidjeti sliku. Prvi način je taj da na mjesto slike postavimo zastor kojemu je površina hrapava na skali valne duljine svjetlosti tako da zastor reflektira difuznu svjetlost (na sve strane). Ljudsko oko tada može biti bilo gdje na nekoj udaljenosti od zastora i vidjeti tu sliku kao da se radi o svjetlećem objektu (sekundardnom izvoru). Ako sliku možemo vidjeti na ovaj način, za nju kažemo da je *realna* (za razliku od *virtualne* slike kakvu proizvodi npr. ravno zrcalo).

Drugi je način taj da bez ikakvog zastora postavimo oko na nekoj udaljenosti od položaja slike u smjeru u kojem snop svjetlosti nakon presijecanja postaje divergentan. Ako je sferno zrcalo maleno, tada valja voditi računa o tome da se oko postavi unutar relativno uskog divergentnog snopa. U ovisnosti o položaju oka, može se dogoditi da oko vidi dio slike, a ne i čitavu sliku.

Ako smo predmet postavili na udaljenosti od zrcala koja je veća od polumjera zakrivljenosti ($a > R = 2f$), imat ćemo situaciju poput one prikazane na slici 9.13. Dobivena slika bit će realna i obrnuta, te će se nalaziti između fokusa i centra zakrivljenosti ($f < b < R$). Već smo spominjali činjenicu da zakon refleksije vrijedi i kada zamijenimo smjerove upadne i odbijene zrake; to u primjeru sa slike 9.13 vodi na zaključak da ako predmet stavimo na originalno mjesto slike, da će nova slika biti na mjestu starog predmeta (dakako, ovo je u praksi moguće samo ako je slika realna). Dakle, ako se predmet nalazi između fokusa i centra zakrivljenosti ($f < a < R$), slika će se nalaziti dalje od centra zakrivljenosti ($b > R$). Sve je ove zaključke moguće i direktno provjeriti uvrštavanjem u izraz 9.15.

Što ako se predmet nalazi između tjemena T i fokusa F ($a < f$), kao na slici 9.14? Ucrtane su samo karakteristične zrake - one se reflektiraju od sfernog zrcala kao divergentan snop koji kao da dolazi iz izvora koji se nalazi s druge strance zrcala. Ovdje, dakle, nastaje virtualna slika jer se zrake svjetlosti ne sijeku uistinu na poziciji P' i postavljanje zastora na tu lokaciju je besmisleno. Virtualnu sliku možemo vidjeti samo postavljanjem oko u divergentan snop nastao refleksijom na zrcalu.



Slika 9.14: Konstrukciju slike kod konkavnog sfernog zrcala (za slučaj $a < f$).

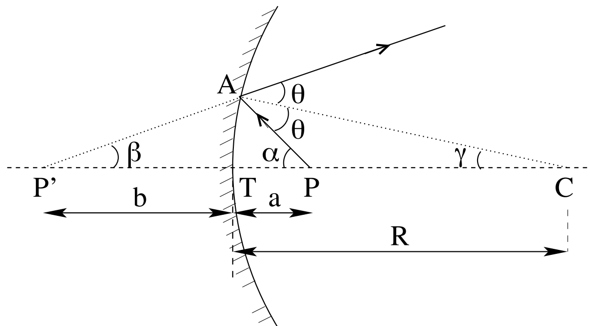
Jednadžbu sfernog zrcala izveli smo u slučaju $a > f$, veličine a i b u izrazu 9.15 u izvodu smatrali smo pozitivnim. Postavlja se pitanja kako mora izgledati jednadžba u slučaju prikazanom na slici 9.14, kada je $a < f$. Ponovimo izvod jednadžbe sfernog zrcala u tom slučaju, za točkasti predmet, kao na slici 9.15.

Postupkom analognim napravljenom pri analizi slike 9.9, dobivamo iz trokuta PAC:

$$180^\circ - \gamma - \theta = 180^\circ - \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \gamma + \theta = \alpha \quad .$$

Analognim razmatranjem trokuta PP'A dobiva se:

$$180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 2\theta \qquad \Rightarrow \qquad 2\theta = \beta + \alpha \quad .$$



Slika 9.15: Nastanak slike na sfernom konkavnom zrcalu kada je predmet između tjemena i fokusa.

Eliminacijom kuta θ iz gornjih dvaju jednadžbi dobiva se:

$$\alpha - \beta = 2\gamma \quad .$$

Izrazimo sve kutove preko lukova:

$$\gamma = \frac{\widehat{AT}}{R} \quad ,$$

$$\alpha \approx \frac{\widehat{AT}}{a} \quad , \quad \beta \approx \frac{\widehat{AT}}{b} \quad ,$$

pa dobivamo:

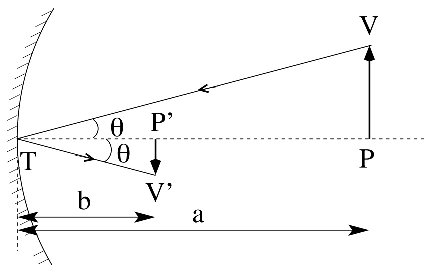
$$\frac{\widehat{AT}}{a} - \frac{\widehat{AT}}{b} = 2\frac{\widehat{AT}}{R} \quad ,$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f} \quad .$$

Ako uvedemo dogovor da ćemo udaljenost slike od predmeta (b) smatrati negativnom ako je slika virtualna ("s krive strane zrcala"), tada u dobivenoj jednadžbi trebamo promijeniti predznak veličini b i jednadžba postaje identična prije izvedenoj (izraz 9.15).

Sličnim se razmatranjem može proučiti situacija kada je predmet virtualan (npr. prvim je zrcalom dobivena slika koja se nalazi na "krivoj strani" drugog zrcala, kojem igra ulogu predmeta), te kada je zrcalo konveksno. U **svim slučajevima** jednadžba zrcala može se svesti na izraz 9.15, ako prihvatimo sljedeće konvencije:
1) udaljenost predmeta (objekta) a je pozitivna ako se nalazi s one strane zrcala s koje dolazi upadna svjetlost;
2) udaljenost slike b je pozitivna ako se nalazi s one strane zrcala kamo putuju reflektirane zrake svjetlosti;
3) polumjer zrcala R i žarišnu daljinu f uzimamo kao pozitivne ako se centar zakrivljenosti nalazi s one strane zrcala na koju putuju reflektirane zrake svjetlosti (dakle, ako je zrcalo konkavno).
U suprotnim slučajevima (ako je predmet virtualan, slika virtualna ili zrcalo konveksno), odgovarajuće se veličine uzimaju kao *negativne.*

Definirajmo na kraju ovog razmatranja zrcala veličinu koju ćemo zvati **koeficijent povećanja**. Da bi ga uveli, razmotrimo sliku 9.16. Na njoj su ucrtani položaji predmeta P i slike P', dobiveni standardnim postupkom pomoću karakterističnih zraka. Jedina karakteristična zraka koja je ucrtana je ona koja prolazi kroz tjeme T, jer nam ona omogućava usporedbu veličina predmeta i slike. Položaj vrhova predmeta, odnosno slike, na slici su označeni s V, odnosno V'. Iznos koeficijenta povećanja



Slika 9.16: Uz definiciju koeficijenta povećanja.

m definiramo kao omjer veličina slike i predmeta:

$$|m| = \frac{\overline{P'V'}}{\overline{PV}} \quad .$$

Iz sličnosti trokuta PVT i P'V'T odmah slijedi:

$$|m| = \frac{b}{a} \quad .$$

Činjenicu da je slika obrnuta uključit ćemo u ovaj izraz čineći ga negativnim:

$$m = -\frac{b}{a} \quad .$$

Ovako dobiven izraz vrijedi za sve moguće slučajeve, uz gore navedene konvencije. Ako se za koeficijent povećanja m dobije negativan broj, to znači da je slika obrnuta. Ako je m po iznosu veći od 1, slika je uvećana, dok je za m manji od jedan, slika umanjena.

Demonstracijski pokus 9.3: nastanak slike na sfernom zrcalu.

Važno uočiti: situacije kada je slika realna ili virtualna, uvećana ili umanjena, uspravna ili obrnuta.

9.4.3 Slika koja nastaje nakon loma svjetlosti

Razmotrimo dva optička sredstva indeksa loma n_1 i n_2, s time da je granična ploha među njima sfernog oblika polumjera R (slika 9.17). Neka je $n_2 > n_1$ (zraka prelazi iz optički rjeđeg sredstva u optički gušće).

Kao i uvijek, lom zraka svjetlosti opisujemo Snellovim zakonom:

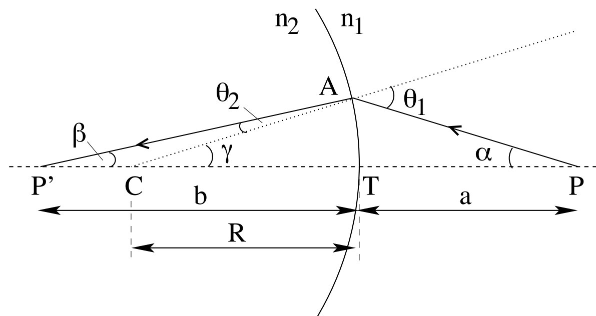
$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \quad .$$

I u ovoj situaciji ograničit ćemo se na paraksijalne zrake (aproksimaciju malih kutova), pa tada imamo:

$$n_1\theta_1 = n_2\theta_2 \quad .$$

Razmatrimo vanjske i unutarnje kutove trokuta PCA - kao i prije, suma kutova u trokutu mora biti jednaka 180°, kao i suma dva kuta koji čine ispruženi. Dobivamo:

$$\theta_1 = \alpha + \gamma \quad .$$



Slika 9.17: Nastanak slike nakon loma svjetlosti (slučaj $n_2 > n_1$).

Slično za trokut CP'A dobivamo:

$$\gamma = \theta_2 + \beta \quad .$$

Prvu od ove dvije jednadžbe pomnožimo s n_1, a drugu s n_2; dobivamo:

$$n_1\theta_1 = n_1(\alpha + \gamma) \quad ,$$

$$n_2\gamma = n_2\theta_2 + n_2\beta \quad .$$

Zbrojimo li te dvije jednadžbe, dobivamo:

$$n_1\theta_1 + n_2\gamma = n_1(\alpha + \gamma) + n_2\theta_2 + n_2\beta \quad .$$

Iskroristimo li sad Snellov zakon, dobivamo:

$$\gamma(n_2 - n_1) = n_1\alpha + n_2\beta \quad .$$

Izrazimo kutove iz ove jednadžbe preko luka $\widehat{AT}$; za zrake uz optičku os (paraksijalne zrake) vrijedi (kada kutove izrazimo u radijanima):

$$\alpha \approx \frac{\widehat{AT}}{a} \quad , \quad \beta \approx \frac{\widehat{AT}}{b} \quad , \quad \gamma = \frac{\widehat{AT}}{R} \quad .$$

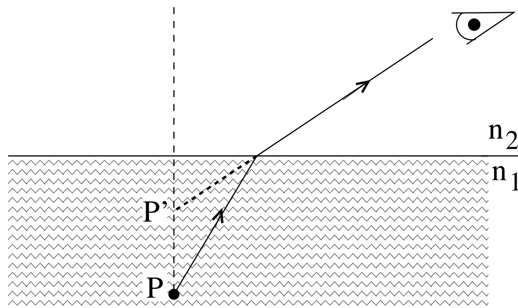
Uvrštavanjem dobivamo:

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad . \tag{9.16}$$

Dobivena jednadžba formalno je vrlo slična jednadžbi za zrcalo. Jedna bitna razlika je ta da se udaljenost predmeta b kao pozitivna uzima kada je s druge strane leće (kod zrcala je bilo obrnuto). I za refleksiju i za lom kao "pozitivan smjer" uzima se, dakle, smjer "odlazećih" svjetlosnih zraka (no u jednom slučaju to se poklapa sa smjerom upadnih zraka, a u drugom ne). Uzmemo li u obzir ovaj detalj, pokazuje se da sve ostale konvencije za predznake pojedinih veličina ostaju iste kod refleksije svjetlosti.

Druga odmah uočljiva razlika između odbijanja i loma je ta da veličine a i b u izrazu 9.16 nisu simetrične. Da bi opisali što se dešava ako promijenimo smjer širenja zraka (što, dakako, mora voditi na moguću situaciju), moramo u izrazu 9.16 izvršiti zamjene: $a \to b$, $b \to a$, ali i $n_1 \to n_2$, $n_2 \to n_1$ i $R \to -R$ (konkavnu površinu smo zamijenili konveksnom).

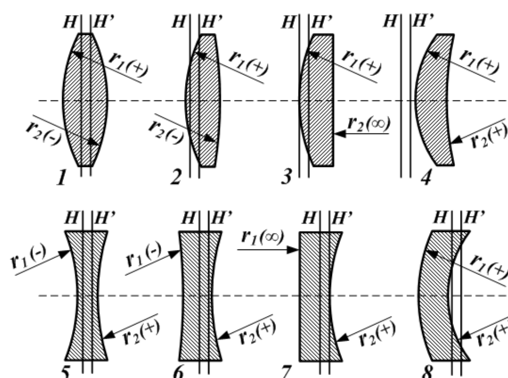
Naglasimo još da je predmet na slici 9.17 davao realnu sliku; da je predmet bio postavljen na udaljenost od tjemena koja je manja od polumjera, slika bi bila virtualna (izraz 9.16 dao bi $b<0$). Ako je granična ploha dvaju optičkih sredstava ravna, tada vrijedi $R=\infty$, pa je svaki predmet na udaljenosti manjoj od polumjera. Slika je stoga uvijek virtualna, a u situacijama kada je $n_1 > n_2$ (npr. pri prelasku svijetla iz vode u zrak), slika se nalazi na manjoj udaljenosti od predmeta ($b=-a/n$) - tako nam se npr. čini da se objekti u moru nalaze na manjoj dubini nego što oni stvarno jesu (vidi sliku 9.18).



Slika 9.18: Nastanak slike pri prelasku iz optički gušćeg u optički rjeđe sredstvo, kada je granična ploha ravna.

9.4.4 Nastanak slike na tankoj leći

Osim zrcala, leće su najčešće korišteni optički instrumenti. Princip nastanka slike je isti kao i u prethodnom potpoglavlju, no sve se zrake lome na *dvije* površine leće, ulaznoj i izlaznoj. Kod najjednostavnijih leća te su dvije površine sferične, a debljina leće malena - zato govorimo o "tankim lećama". I uz takve restrikcije na oblik leće, broj mogućih realizacija je velik (slika 9.19 prikazuje samo dio njih).



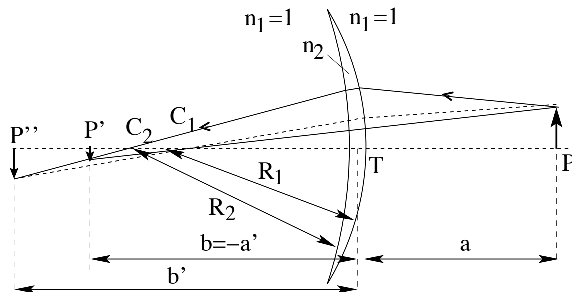
Slika 9.19: Razni oblici tankih leća: (1) bikonveksna; (3) plan-konveksna; (5) bikonkavna; (7) plan-konkavna. Predznak polumjera zakrivljenosti za pojedine površine naveden je uz pretpostavku da svjetlost na leće pada s lijeve strane.

Izvedimo jednadžbu leće krećući od izraza 9.16. Pretpostavimo da je leća konveks-konkavna; zraka svjetlosti iz izvora na taj način dva puta dolazi na graničnu plohu kao na slici 9.17. Odgovarajući polumjeri zakrivljenosti dvaju ploha jednaki su R_1 i R_2. Slika predmeta koja nastaje lomom na prvoj od te dvije površine, postaje predmet za lom na drugoj. Ako je leća dovoljno tanka (a to najčešće je slučaj, u usporedbi s veličinom i udaljenošću objekta), tada je udaljenost nekog objekta (ili slike) od jedne zakrivljene površine jednaka udaljenosti tog objekta (ili slike) od druge zakrivljene površine.

Na slici 9.20 zrake svjetlosti kreću s izvora P (na slici desno) i padaju na desnu stranu leće. Izračunajmo položaj slike P' nastale na prvoj zakrivljenoj graničnoj površini (polumjera R_1) pomoću izraza 9.16:

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \quad .$$

Za skoro sve praktične primjene, leća se nalazi u zraku pa možemo staviti n_1=1, n_2=n. Prva



Slika 9.20: Nastanak slike na konveksno-konkavnoj leći.

zakrivljena površina stvorila je sliku P' za b udaljenu od (tjemena) leće, na lijevoj strani od nje (dakle, na suprotnoj strani od predmeta P). Ta je slika sada predmet za drugu zakrivljenu površinu, polumjera R_2. Dakle, za drugi lom udaljenost predmeta a' jednaka je $-b$: minus zato jer je predmet virtualan, tj. s "krive strane" leće (nije sa strane s koje dolaze zrake svjetlosti), a b zato jer je leća vrlo tanka pa je udaljenost od njenog lijevog ruba skoro jednaka udaljenosti od njenog desnog ruba. Za drugu površinu (za prijelaz n_2=$n \rightarrow n_1$=1) pišemo stoga:

$$\frac{n}{-b} + \frac{1}{b'} = \frac{1-n}{R_2} \quad .$$

Zbrojimo li ove dvije jednadžbe, dobivamo:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad .$$

S b' smo označili udaljenost konačne slike od leće. Ovaj izraz bit će formalno identičan izrazu za zrcalo,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{f} \quad , \tag{9.17}$$

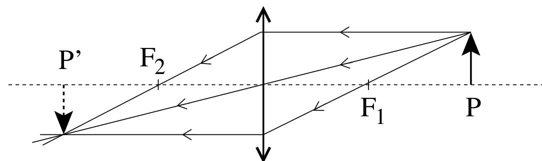
uvedemo li žarišnu duljinu leće f kao:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad .$$

Slično kao i za zrcala, izraz 9.17 vrijedit će za leće svih oblika pridržavamo li se sljedećih dogovora (ovo navodimo bez dokaza):
1) polumjer zakrivljenosti u izrazu za žarišnu daljinu uzimamo kao pozitivan ako površinu vidimo kao konveksnu u smjeru širenja zrake (obrnuto, konkavnu površinu uzimamo kao negativnu);
2) udaljenost predmeta od leće uzimamo kao pozitivnu ako se predmet nalazi sa strane leće s koje svjetlost pada na leću;
3) udaljenost slike od leće uzimamo kao pozitivnu ako se slika nalazi sa strane leće s koje svjetlost odlazi s leće.

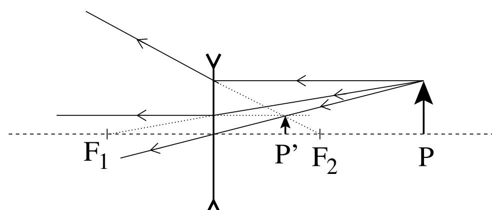
Na slici 9.19 dane su leće različitih oblika, te je za njih navedeno treba li polumjere zakrivljenosti uzimati kao pozitivne ili kao negativne (pretpostavlja se da svjetlost na te leće pada slijeva). Za sve leće u prvom retku (leće 1-4), lako je pokazati da im je žarišna duljina f pozitivna, dok je za sve leće u drugom retku (leće 5-7) f negativan; općenito će f biti negativan ako je leća tanja u sredini nego na rubu. Ako je žarišna duljina negativna, zrake svjetlosti s realnog predmeta će nakon loma divergirati; zbog toga se općenito leće s negativnom žarišnom duljinom zovu **divergentnim**, a leće s pozitivnom žarišnom duljinom **konvergentnim**.

Grafički, položaj slike nalazimo crtanjem karakterisitčnih zraka kao na slikama 9.21 i 9.22. Na slikama prvo treba uočiti standardne oznake za konvergentnu (slika 9.21) i divergentnu (slika 9.22)



Slika 9.21: Karakteristične zrake za konvergentnu leću.

leću. Zatim treba uočiti činjenicu da leće imaju dva fokusa, oba udaljena za f od tjemena leće. Ako u prvi fokus (F_1) stavimo izvor svjetlosti, zrake snopa će nakon prolaska kroz leću biti paralelne optičkoj osi. Drugi fokus (F_2) je točka u kojoj bi se sjekle zrake svjetlosti koje dolaze s predmeta koji se nalaze u beskonačnosti. Obje ove tvrdnje direktne su posljedice jednadžbe 9.17. Budući da divergentne leće imaju negativnu žarišnu duljinu f, kod njih se na strani s koje dolazi svjetlost nalazi drugi fokus, F_2, dok je F_1 na "odlaznoj" strani leće (slika 9.22).



Slika 9.22: Karakteristične zrake za divergentnu leću.

Tri **karakteristične zrake** za konstrukciju slike na tankim lećama su:
1) zraka koja s predmeta P putuje paralelno optičkoj osi, na leći se lomi tako da se nalazi na pravcu koji prolazi kroz fokus F_2. U slučaju konvergentne leće, sama zraka prolazi kroz F_2, dok kod divergentne leće kroz F_2 prolazi produžetak zrake na "ulaznu" stranu svjetlosti.
2) zraka koja putuje prema fokusu F_1, nakon loma bit će paralelna optičkoj osi. Opet, za konvergentnu leću zraka zbilja i prolazi kroz F_1, dok za divergentnu ne.
3) zraka koja s predmeta P putuje prema tjemenu leće (tj. središnjoj točki leće) neće doživjeti lom. Naime, zbog simetrije ulazna i izlazna površina za ovu su zraku paralelni, pa leća ne zakreće svjetlost, već ju samo zamiče za pomak koji je proporcionalan debljini leće (a za tanke leće taj je pomak zanemarivo malen).

Na mjestu gdje se sijeku tri karakteristične zrake (ili bilo koje dvije od njih tri), odnosno njihovi produžeci, nalazi se slika P'. Sa slika 9.21 i 9.22 se i jasno vidi da je izlazni snop zraka s divergentnih leća divergentan, a s konvergentnih leća konvergentan, *kada je predmet udaljen od leće za više od žarišne duljine f.* U principu, konvergentna leća daje divergentnu sliku, ako vrijedi $a<f$. Divergentna leća dat će konvergentan snop samo ako je predmet (objekt) virtualan - to je moguće kod sistema s više optičkih elemenata koje ćemo diskutirati u nastavku.

Demonstracijski pokus 9.4: nastanak slike na tankoj leći.

Važno uočiti: situacije kada je slika realna ili virtualna, uvećana ili umanjena, uspravna ili obrnuta.

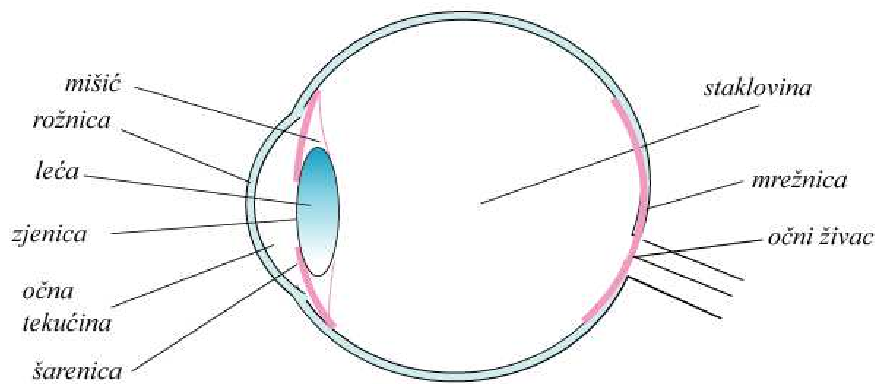
9.4.5 Fermatov princip

Prije daljnjeg razmatranja geometrijske optike i složenijih sistema, osvrnimo se samo na osnovne zakone geometrijske optike i na njihov alternativan izvod. Sva tri zakona geometrijske optike, kao i kasniji rezultati razmatranja zrcala i leća, mogu se izvesti iz tzv. Fermatovog principa[3], koji kaže: *put kojim zraka svjetlosti putuje između dvije točke je onaj za koji joj je potrebno najmanje vremena da ga svijetlost prijeđe.* Sam Fermatov princip počiva na Huygensovom principu kojeg ćemo spominjati kasnije, a konceptualno je blizak principu najmanje akcije koji se uči na kolegiju "Klasična mehanika". Za izvode zakona refleksije ili Snellovog zakona iz Fermatovog principa isplati se pogledati *Feynman: "Lectures in Physics I"*, poglavlje 26[4].

9.5 Oko i optički uređaji

9.5.1 Oko

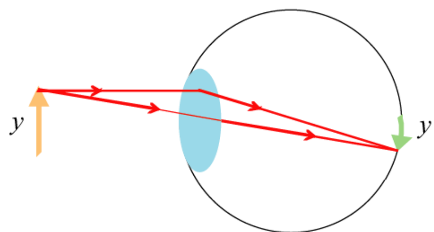
Shematski prikaz oka dan je na slici 9.23. S aspekta ovog kolegija najbitniji dijelovi su leća i mrežnica. Leća može mijenjati oblik (pomoću mišića u šarenici), te prilagoditi svoju geometriju tome da stvori oštru sliku promatranog objekta na mrežnici, gdje se ta slika "očitava" fotosenzitivnim živcima ("štapićima" i "čepićima"), te preko očnog živca šalje na obradu u mozak. Tipična udaljenost leće od mrežnice je ≈2.5-3 cm. Treba naglasiti da u stvaranju konačne slike na mrežnici sudjeluju uz leću i očna tekućina i staklovina - no očna leća je jedina komponenta tog sistema koja se može bitno prilagoditi udaljenosti objekta koji se promatra (i time promijeniti žarišnu duljinu cijelog sistema). Otvorom zjenice kontrolira se intenzitet svjetlosti koji se propušta u oko i na taj se način oko akomodira osvjetljenosti okoline.



Slika 9.23: Shematski prikaz ljudskog oka.

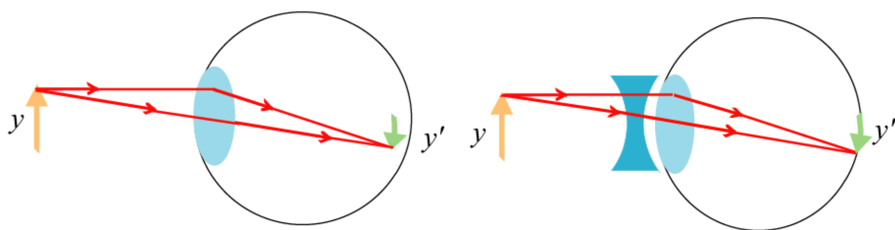
Način funkcioniranja zdravog oka prikazan je na slici 9.24. Slika stvorena lećom je jako umanjena i obrnuta, no ljudski je mozak "istreniran" pravilno ju interpretirati (tj. okrenuti). Leća oka može se prilagoditi promatranju objekata koji se nalaze na proizvoljnoj udaljenosti između takozvane "bliske" i "daleke" točke oka. "Daleka točka" zdravog oka je u beskonačnosti, dok položaj "bliske točke" raste sa starošću (za 20-godišnjaka nalazi se na oko 10 cm). Kad proučavamo neki objekt, približavamo ga oku da bi njegova kutna dimenzija bila što veća - no zbog postojanja "bliske točke", objekt ne možemo proizvoljno približiti oku (jer bi nam tada njegova slika postala vrlo mutna), nego ga optimalno stavljamo na udaljenost od ≈25 cm od oka.

[3]Pierre de Fermat, francuski pravnik, matematičar i fizičar, 1662.
[4]Bazično razmatranje Fermatovog principa dano je i u F.S.Crawford Jr.: "Waves", str. 501.



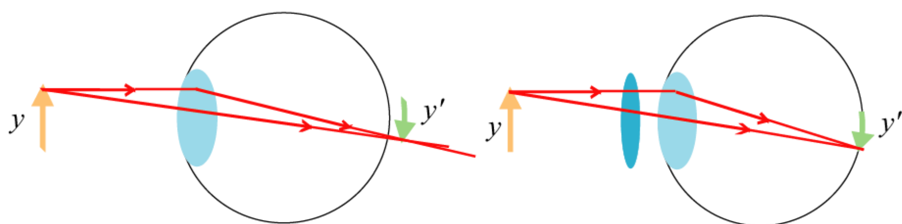
Slika 9.24: Princip rada zdravog oka.

Kod kratkovidnog oka, mišići oka nisu u stanju prilagoditi oblik leće situaciji koja zahtijeva veliku žarišnu duljinu. Slika dalekih predmeta koju stvara leća takvog oka nalazi joj se stoga preblizu, kao na lijevom dijelu slike 9.25. Kratkovidna osoba stoga ne može vidjeti oštro udaljene predmete, dok posve dobro vidi bliske. Korekcija tog problema postiže se stavljanjem dodatne divergentne leće (u praksi naočala ili kontaktnih leća) ispred oka, kao što je shematski prikazano na desnom dijelu slike 9.25.



Slika 9.25: Kratkovidno oko: nastanak slike bez dodatne leće (lijevo), te s korektivnom lećom (desno).

Analogno, kod dalekovidnog oka mišići oka nisu u stanju prilagoditi oblik leće situaciji koja zahtijeva malenu žarišnu duljinu. Slika bliskih predmeta koju stvara leća takvog oka nalazi joj se stoga predaleko, kao na lijevom dijelu slike 9.26. Dalekovidna osoba stoga ne može vidjeti oštro bliske, dok posve dobro vidi udaljene predmete. Korekcija tog problema postiže se stavljanjem dodatne konvergentne leće ispred oka, kao što je shematski prikazano na desnom dijelu slike 9.26.



Slika 9.26: Dalekovidno oko: nastanak slike bez dodatne leće (lijevo), te s korektivnom lećom (desno).

Dalekovidnost i kratkovidnost se obično diskutiraju izražavanjem tzv. jakosti korektivne leće. Jakost leće (*engl.* lens power) je jednostavno inverz žarišne duljine leće ($1/f$); ako zarišnu duljinu f izrazimo u metrima, tada smo jakost izrazili kao tzv. dioptriju. Korektivne leće za kratkovidnog oko imaju negativnu optičku jakost (divergentne su, f je negativan), što kompenzira pozitivnu dioptriju takvog oka. Za dalekovidno oko korektivne leće moraju biti pozitivne jakosti.

9.5.2 Teleskop

Teleskopi su optički instrumenti namijenjeni promatranju vrlo dalekih objekata (pa i zvijezda i galaksija). U pravilu se sastoji od dva glavna optička elementa. Ovisno o primarnom optičkom elementu (koji sakuplja svjetlost s objekta pa se naziva "objektiv"), razlikujemo teleskope reflektore (objektiv je zrcalo) i teleskope refraktore (objektiv je leća). Većina modernih astronomskih teleskopa su reflektori, kojima zrcala mogu imati vrlo velike promjera zbog značajnog napretka tehnologije izrade teleskopa i materijala od kojih su građeni (najveći teleskopi imaju danas promjere i preko 10 m). Neovisno o vrsti primarnog elementa, ako je objekt udaljen, njegova slika nalazit će se otprilike u fokusu objektiva. Veličina te slike h_1 bit će jednaka $h_1{=}b\theta_0{\approx}f_1\theta_0$, gdje je f_1 žarišna duljina objektiva (približno jednaka udaljenosti slike b), a θ_0 kutna veličina promatranog objekta.

Drugi optički element teleskopa je skoro uvijek leća. Ona se, dakle, nalazi u dijelu teleskopa prema oku, pa se naziva "okular". Okular funkcionira kao obično povećalo realne slike koju stvara objektiv. U praksi se slika objektiva dovodi u blizinu fokusa okulara, pa je konačan snop (koji ulazi u oko) paralelan optičkoj osi teleskopa. Kutna veličina konačne slike jednaka je tada $h_2/b'{=}h_1/a'{=}h_1/f_2$. Usporedimo konačnu kutnu veličinu s početnom:

$$\frac{h_1/f_2}{\theta_0} = \frac{f_1\theta_0/f_2}{\theta_0} = \frac{f_1}{f_2} \quad .$$

Kutno povećanje teleskopa dano je, dakle, s f_1/f_2 - želimo li ga maksimalizirati, žarišna duljina objektiva mora biti što veća, a žarišna duljina okulara što manja. Već maleni "kućni teleskopi" imaju kutno povećanje reda veličine 100. Hubbleov svemirski teleskop (*engl.* Hubble Space Telescope, HST) ima kutno povećanje jednako ≈8000.

Ovdje je diskutirana samo bazična građa teleskopa - u praksi oni sadrže dodatne optičke elemente koji služe smanjivanju svih mogućih nesavršenosti pri stvaranju konačne slike (no u okviru ovog kolegija nema prostora za diskusiju istih). Spomenimo još da astronomski teleskop stvara obrnutu sliku - tzv. terestrički teleskopi ili durbini (za promatranje dalekih objekata na površini Zemlje) imaju stoga i dodatni optički element koji "okreće" sliku.

9.5.3 Mikroskop

Mikroskop je optički instrument namijenjen proučavanju vrlo malenih objekata. Principijelno se sastoji od dvije leće, koje se kao i kod teleskopa nazivaju objektiv i okular. Predmet koji se želi proučavati stavlja se u blizinu fokusa objektiva - time se postiže da se slika predmeta nalazi na vrlo velikoj udaljenosti L (definiranoj veličinom cijevi mikroskopa, tipično 20-tak cm).

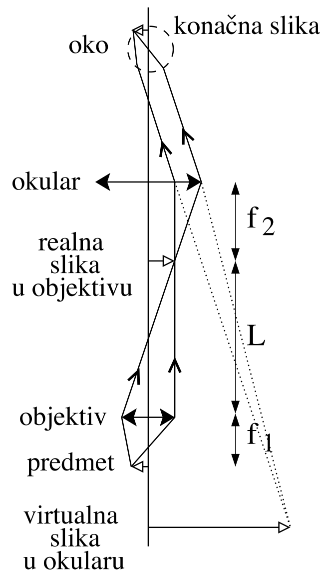
Slika proizvedena objektivom time postaje vrlo uvećana i ima dimenziju: $h_1{=}(L/f_1)h_0$. Fokus okulara stavlja se u blizinu slike objektiva i time postiže da snop zraka iz teleskopa bude skoro paralelan. Konačna slika optimalno treba biti na udaljenosti od 25 cm od oka (vidi diskusiju zdravog oka na prethodnim stranicama); povećanje mikroskopa naći ćemo kao umnožak povećanja objektiva i povećanja okulara

$$\frac{h_1}{h_0} \cdot \frac{h_2}{h_1} = \frac{L}{f_1} \cdot \frac{0.25\,\mathrm{m}}{f_2} = \frac{0.25\,\mathrm{m} \cdot L}{f_1 f_2} \quad .$$

Povećanja od par tisuća danas su standardna i za jednostavne mikroskope.

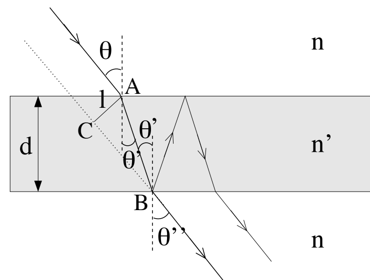
9.5.4 Ostali optički uređaji

Postoji još čitav niz drugih optičkih elemenata i instrumenata koji se koriste u geometrijskoj optici, navedimo ih samo neke (optički uređaji bitni za fizičku optiku bit će diskutirani u narednom



Slika 9.27: Shematski prikaz mikroskopa. Omjeri veličina nisu realni; za mikroskope vrijedi $L \gg f_1$.

potpoglavlju). Obično **povećalo** je jednostavna konvergentna leća kojom se stvara uvećana realna slika nekog predmeta.



Slika 9.28: Prolaz paralelnog snopa zraka kroz planparalelnu ploču.

Planparalelna ploča (slika 9.28) je kvadar napravljen od prozirnog materijala indeksa loma n, kojim se snop paralelnih zraka svjetlosti samo pomiče u prostoru, bez njegovog zakretanja. Analizirajmo prolaz zraka kroz ploču debljine d - indeks loma ploče označimo s n', dok je indeks loma sredstva u kojem se ploča nalazi dan s n (obično je u pitanju zrak, tada vrijedi $n \approx 1$). Za lom na ulazu u ploču vrijedi:

$$n \sin\theta = n' \sin\theta' \quad .$$

Budući da su stranice ploče paralelne, kut upada na izlaznu stranicu bit će upravo jednak kutu θ', pa za lom pri izlazu iz planparalelne ploče jednostavno vrijedi:

$$n' \sin\theta' = n \sin\theta'' \quad .$$

Kombiniranjem gornjih jednadžbi dobivamo:

$$\theta = \theta'' \quad ;$$

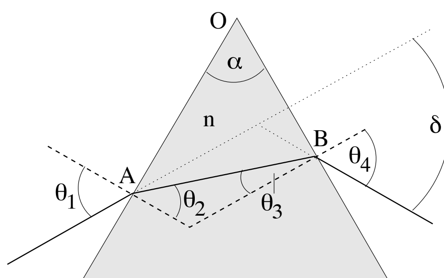
zrake što izlaze iz ploče paralelne su upadnim. “Pomak snopa” l (vidi sliku 9.28) nalazimo iz pravokutnog trokuta ABC; on je jednak hipotenuzi tog trokuta pomnoženoj sa sinusom manjeg

oštrog kuta (koji je jednak $\theta - \theta'$). Budući da je rečena hipotenuza jednaka $d/\cos\theta'$, za pomak konačno dobivamo:

$$l = \frac{d}{\cos\theta'} \cdot \sin(\theta - \theta') \quad .$$

Pomak l je to veći što je planparalelna ploča deblja i što zrake upadaju paralelnije površini ploče. Uočite da se na svim granicama dešava i djelomična refleksija zraka (po Fresnelovim relacijama), no ona nas u ovom kontekstru ne zanima.

Optička prizma je prizma napravljena od prozirnog materijala indeksa loma n, kojom se snopu svjetlosti mijenja smjer - budući da indeks loma ovisi o valnoj duljini svjetlosti (disperzija svjetlosti spomenuta je na str. 180), prizmom će se različito zakrenuti svjetlost različitih valnih duljina i stoga je ona ponajbolji način "rastavljanja" bijele (miješane) svjetlosti na boje spektra.



Slika 9.29: Prolaz paralelnog snopa zraka kroz prizmu.

Nađimo izraz za kut devijacije (zakretanja) upadne zrake pri prolasku kroz prizmu. Iz trokuta AOB sa slike 9.29 vidimo:

$$\alpha + (90^\circ - \theta_2) + (90^\circ - \theta_3) = 180^\circ \quad ,$$

što vodi na:

$$\theta_2 + \theta_3 = \alpha \quad .$$

Zakretanje zrake na ulaznoj površini u prizmu dano je kutom:

$$\theta_1 - \theta_2 \quad ,$$

a na izlaznoj s:

$$\theta_4 - \theta_3 \quad ,$$

pa je ukupan kut devijacije δ dan s:

$$\delta = (\theta_1 - \theta_2) + (\theta_4 - \theta_3) = \theta_1 + \theta_4 - \alpha \quad ,$$

Budući da kut θ_4 ovisi samo o upadnom kutu θ_1, indeksu loma prisme n i "vršnom kutu" prizme α, kut devijacije bit će isti za sve upadne paralelne zrake - paralelan snop zraka ostat će paralelan, no zakrenut u odnosu na upadni smjer za kut δ.

Kao što je već rečeno, indeks je loma općenito ovisan o valnoj duljini upadnog svjetla. To će za posljedicu imati činjenicu da će gornji kut devijacije ovisiti o boji - upadna bijela svjetlost (svjetlost "složena" od svih boja) razložit će se na "dugin spektar" (najviše će se zakrenuti ljubičasta i plava svjetlost za koji je indeks loma najveći). Ova se pojava naziva *disperzija svjetlosti.*

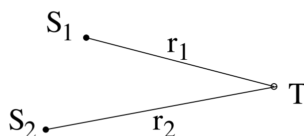
Demonstracijski pokus 9.5: disperzija svjetlosti na prizmi.

Važno uočiti: poredak boja u spektru, ovisnost projeciranog spektra o upadnom kutu svjetlosti na prizmu.

9.6 Interferencija svjetlosti

Pređimo sada na situacije u kojima se manifestira valna priroda svjetlosti. tj. na tzv. **fizičku optiku**. Kao i svi drugi valovi, i svjetlost pokazuje interferentne efekte. Da bi interferenciju uočili, potrebno je da se dvije (ili više) zraka svjetlosti iste valne duljine (dakle, "monokromatske") nađu u istom dijelu prostora (u isto vrijeme) - u praksi se to postiže tako da zrake iz istog izvora različitim putevima (uz razne refleksije i refrakcije) dođu do iste točke, a da izvor emitira svjetlost konstantno u vremenu koje je dugo u usporedbi s periodom T. Za dva (prividna ili realna) izvora koja emitiraju monokromatsku svjetlost konstantne razlike u fazi kažemo da su **koherentni**[5]. Koherentnu svjetlost mi ćemo u pokusima dobivati upotrebom lasera i polupropusnih zrcala (laser funkcionira na takav način da atomi koji u njemu stvaraju svjetlost to rade korelirano). Ako su valovi transverzalni, kao što je to slučaj sa svjetlošću, da bi dobili interferentne efekte nužno je i da polarizacija valova bude jednaka.

Pretpostavimo da imamo dva izvora koherentne svjetlosti jednake polarizacije, koji su u fazi (ovim zadnjim uvjetom samo izbjegavamo eksplicitno pisanje razlike faza $\Delta\phi$ u svim izrazima koji slijede). Izvore označimo sa S_1 i S_2, te promotrimo što se dešava u proizvoljnoj točki T u prostoru, koja je za za r_1 udaljena od izvora S_1, a za r_2 udaljena od izvora S_2 (slika 9.30).



Slika 9.30: Interferencija koherentne svjetlosti iz izvora S_1 i S_2.

Ako su dvije zrake svjetlosti u fazi na izvoru (u točkama S_1 i S_2), one ne moraju biti u fazi u točki T gdje se sijeku. Električno polje za svaku zraku dano je s:

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01} \sin\left(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1\right) \quad ,$$

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{02} \sin\left(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2\right) \quad .$$

Skalarni produkti u argumentu sinusa svode se na obične produkte (vektore $\vec{r}$ mjerimo od pojedinog izvora, pa imaju isti smjer kao odgovarajući valni vektori), pa je razlika u fazama gornja dva vala posljedica sljedeće razlike:

$$kr_1 - kr_2 = k\,(r_1 - r_2) \quad ;$$

(uočite i to da su valni vektori $\vec{k}_1$ i $\vec{k}_2$ istog iznosa jer je valna duljina ista - razmatramo monokromatski slučaj).

Konstruktivna interferencija dešavat će se u točkama gdje je razlika u fazi jednaka cjelobrojnom višekratniku od 2π:

$$k\,(r_1 - r_2) = 2\pi \cdot m \quad ,$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}\,(r_1 - r_2) = 2\pi \cdot m \quad ,$$

$$r_1 - r_2 = m\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{9.18}$$

Dakle, do konstruktive interferencije dolazi kada je razlika putova dvaju zraka jednaka cjelobrojnom višekratniku valne duljine svjetlosti.

[5] *lat.* cohaerere - biti svezan, prianjati.

Destruktivna interferencija dešavat će se u točkama gdje je razlika u fazi jednaka neparnom višekratniku od π:

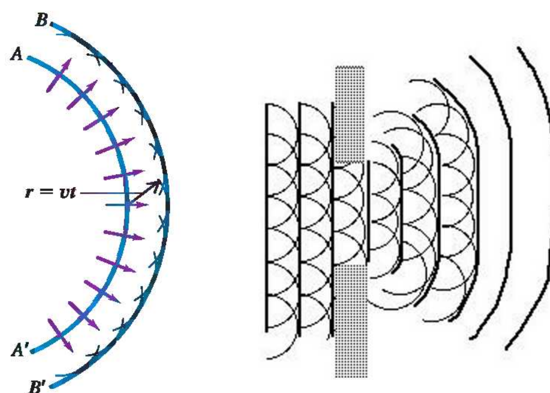
$$k\,(r_1 - r_2) = \pi \cdot (2m+1) \quad ,$$

$$r_1 - r_2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{9.19}$$

Pogledajmo kako dolazi do konstruktivne i destruktivne interferencije u par primjera.

9.6.1 Huygensov princip

Huygensov princip[6] samo eksplicitno za svjetlost navodi pravilo koje smo naučili pri mehaničkom širenju vala: *svaka točka valne fronte u nekom trenutku može se smatrati izvorom sekundarnih valova koji se šire u svim smjerovima brzinom širenja vala u danom sredstvu.* Novu valnu frontu, u nekom kasnijem trenutku, nalazimo sumirajući doprinose sekundarnih valova, kao što je prikazano na slici 9.31. Svi rezultati dobiveni krećući od Maxwellovih jednadžbi, mogu se dobiti i pomoću Huygensovog principa - nije, dakle, riječ o nezavisnom pravilu, nego o fenomenu "uklopljenom" u sva dosadašnja razmatranja (elektromagnetskih) valova. Ovdje ga eksplicitno navodimo samo zato jer nam je često vrlo koristan pri diskutiranju fenomena u fizičkoj optici.



Slika 9.31: Ilustracija Huygensovog principa. Lijevo: širenje svjetlosti iz točkastog izvora. Desno: prolazak svjetlosti kroz uzak otvor.

Želimo li Huygensov princip koristiti i kvantitativno, a ne samo kvalitativno, potrebno je uvesti i tzv. Fresnelovu korekciju, koja uzima u obzir i kutnu ovisnost amplitude sekundardnih valova kao $1/2(1+\cos\theta)$, gdje je θ smjer širenja primarnog vala. Ovom se korekcijom (tzv. faktorom nagiba) eliminira i pojava valova koji se šire unazad - samo objašnjenje zašto je ona potrebna i izvod njenog konkretnog oblika provodi se obično unutar formalizma Greenove funkcije[7].

9.6.2 Youngov eksperiment s dvije pukotine

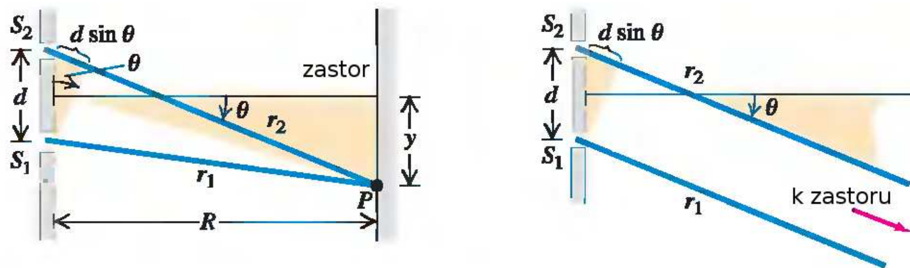
Youngov eksperiment je jedna od prvih, a također i jedna od bazičnijih demonstracija interferencije svjetlosti[8]. Shematski prikaz eksperimenta dan je na slici 9.32. Koherentna monokromatska svjetlost pada na zastor s dvije pukotine (otvora); u modernim verzijama eksperimenta koherentna svjetlost postiže se upotrebom lasera, dok je Young koristio običan izvor monokromatske svjetlosti koju je propuštao kroz jednu usku pukotinu postavljenu na jednaku udaljenost od pukotina na slici

[6] Nizozemski fizičar Christiaan Huygens, 1678.

[7] Pogledati npr. D.A.B. Miller: *"Huygens' wave propagation principle corrected"*, Optics Letters 16 (1991) 1370.

[8] Eksperiment je prvi izveo engleski fizičar Thomas Young 1800. godine.

9.32. Važno je samo to da svjetlost koja pada na svaku od dvije pukotine (S_1 i S_2 na slici, međusobno razmaknute za udaljenost d) bude u fazi. Izraz "pukotina" koristi se zato jer "rupice" na slici 9.32 imaju relativno veliku širinu u smjeru okomitom na papir (no ona je nebitna za diskusiju Youngovog eksperimenta). Sam otvor svake od pukotina je vrlo malen, čak i na skali valne duljine svjetlosti.



Slika 9.32: Shematski prikaz Youngovog eksperimenta. Lijevo: geometrija pokusa (omjeri nisu realni, u stvarnosti je $R \gg d$). Desno: realna geometrija zraka koje putuju do točke P, uvećan dio uz same pukotine.

Na nekoj udaljenosti R od zastora s pukotinama i paralelno njemu, stavlja se zastor za vizualizaciju (slika 9.32 lijevo). Po Huygensovom principu, svjetlost se iz svake od pukotina širi u svim smjerovima, pa postoji zraka svjetlosti koja spaja pukotine S_1 i S_2 sa svakom proizvoljnom točkom P na zastoru za vizualizaciju. Pitamo se u kojim će se točkama na zastoru pojaviti svijetle, a u kojim tamne pruge. Položaj na zastoru parametriziramo preko koordinate y; $y=0$ u točki koja je jednako udaljena od pukotina S_1 i S_2. Odabrana točka P na zastoru (u ravnini slike) bit će od pukotina udaljena za udaljenosti r_1, odnosno r_2, koje su različite svuda osim za točku u $y=0$.

Da bi se interferentni uzorak vidio na zastoru, pukotine S_1 i S_2 moraju biti blizu (usporedivo s valnom duljinom svjetlosti). Stoga je udaljenost zastora nužno puno veća; vrijedi dakle: $R \gg d$. Uz same pukotine, zrake koje kreću iz njih i završavaju u točki P su skoro paralelne (situacija je realno opisana desnim dijelom slike 9.32). Hoće li zrake u točki P biti u fazi ili ne, određuje razlika putova koje one prevaljuju od pukotina (izrazi 9.18 i 9.19). S desnog rijela slike 9.32 vidimo da vrijedi:

$$r_2 - r_1 = d \sin\theta \quad ,$$

gdje je θ kut pod kojim se s pukotina vidi točka P (u odnosu na os simetrije sustava).

Konstruktivnu interferenciju (svijetle pruge) imat ćemo stoga za kutove za koje vrijedi:

$$d \sin\theta = m\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

a destruktivnu (tamne pruge) u slučaju:

$$d \sin\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Preračunajmo ovaj rezultat s kuta θ na koordinatu y; ta je veza za male kutove θ jednostavno:

$$y = R \,\mathrm{tg}\,\theta \approx R \sin\theta \quad ,$$

pa su položaji svijetlih pruga dani s:

$$y_m = R\frac{m\lambda}{d} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

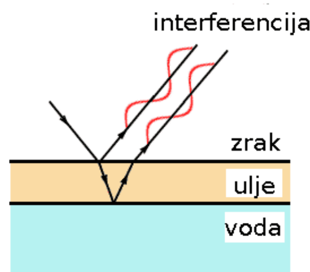
Kasnije ćemo pokazati da intentitet maksimuma osvetljenosti pada s udaljenošću od osi simetrije sustava - u praksi se stoga opažaju samo prve svijetle pruge i gornja restrikcija na male kutove θ je stoga prihvatljiva.

Demonstracijski pokus 9.6: Youngov pokus s dvije pukotine.

Važno uočiti: pojavu tamnih i svijetlih pruga na zastoru; njihov broj i intenzitet. Umjesto dvije pukotine može se koristiti i biprizma.

9.6.3 Interferencija pri refleksiji na tankim slojevima materijala

Na površini mora po kojoj je prolivena nafta, benzin ili neko ulje, redovito vidimo "dugin uzorak", tj. svjetlost razloženu na čitav spektar boja - u ovom potpoglavlju ćemo objasniti zašto dolazi do te pojave. Efekt se pojavljuje svugdje kada na nekom većem volumenu prozirnog materijala (indeksa loma n_2) imamo nanesen tanak sloj (*engl.* film) nekog drugog prozirnog materijala (indeksa loma n_1), kao na slici 9.33.



Slika 9.33: Interferencija pri refleksiji na tankim slojevima materijala.

Dio upadne svjetlosti reflektira se na prvoj granici dva sredstva; za primjer ulja na vodi riječ je o granici između zraka i ulja. Dio svjetlosti transmitira se kroz tu granicu i reflektira na sljedećoj granici dva sredstva (granica ulje - voda na slici 9.33). Dio svjetlosti transmitira se i kroz tu granicu, no taj dio nam je za ovu raspravu nebitan. Između zraka svjetlosti reflektiranih na dvije različite površine dolazi do interferencije. Koeficijent refleksije na svakoj površini (a time i intenzitet reflektirane svjetlosti) može se izračunati iz Fresnelovih relacija; za ovu raspravu bitno nam je ipak samo to što se dešava s fazom.

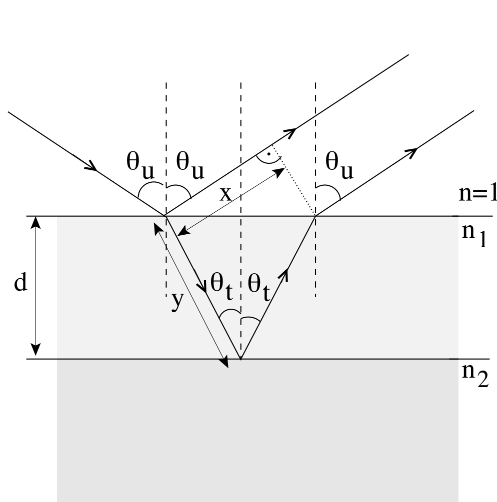
Pri diskusiji Fresnelovih jednadžbi (potpoglavlje 9.1.2) pokazano je da za svjetlost pri okomitom upadu na granicu dva sredstva vrijedi:

$$E_{0r} = \frac{n_a - n_b}{n_a + n_b} E_{0u} \quad ,$$

gdje su E_{0i} i E_{0r} amplitude električnog polja upadne i reflektirane zrake, n_a indeks loma sredstva u kojem putuju upadna i reflektirana zraka, a n_b indeks loma sredstva u kojem putuje transmitirana svjetlost (indekse a i b koristimo u ovom općenitom izrazu da izbjegnemo zbrku s kasnijom upotrebom indeksa "1" i "2"). Pri refleksiji faza će ili ostati ista (pozitivan predznak razlomka u gornjem izrazu) ili će se promijeniti za π (negativan predznak). Ako je $n_a > n_b$, razlomak u gornjem izrazi je pozitivan i reflektiran val je *na granici* optičkih sredstava u fazi s upadnim (to je analogno refleksiji na "slobodnom kraju" u mehanici, vidi poglavlje 4.3). Ako je $n_a < n_b$, razlomak u gornjem izrazi je

negativan i reflektiran je val tada *na granici* optičkih sredstava efektivno za π pomaknut u fazi u odnosu na upadni ("čvrst kraj", vidi poglavlje 4.3).

Ulja uglavnom imaju veći indeks loma (n_{ulja}≈1.5) od vode (n_{voda}=1.33), tako da se prva refleksija na slici 9.33 dešava s promjenom od π, dok pri drugoj refleksiji nema promjene faze (kao ni pri transmisiji druge zrake natrag iz ulja u zrak). Dakle, samo zbog različitih refleskija, dvije zrake koje interferiraju na slici 9.33 imaju različitu fazu za π. Tu razliku treba još povećati zbog činjenice da zrake prelaze različite putove. Uvećajmo komad slike 9.33 da izračunamo razliku putova dvaju zraka (slika 9.34).



Slika 9.34: Razlika optičkih puteva dvaju interferentnih zraka reflektiranih na tankom sloju.

Neka je debljina tankog sloja jednaka d, a kutovi upada i koma θ_u i θ_t. Na slici 9.34 su još označene dvije pomoćne veličine, x i y. Upadna zraka se pri upadu na tanki sloj dijeli na dvije komponente: jedna komponenta u zraku prelazi udaljenost označenu s x, dok druga kroz tanak sloj prolazi udaljenost $2y$ - nakon toga te dvije komponente postaju paralelne i do oka (koje je vrlo daleko) prevaljuju isti put.

Kada uspoređujemo zrake koje su bar dio puta prolazile kroz različite medije, nije dovoljno jednostavno usporediti geometrijske putove, kao u izrazima 9.18 i 9.19. Razlog leži u činjenici da fazu vala određuje produkt kr, a valni broj k je različit za različita valna sredstva (vidi str. 181). Budući da vrijedi:

$$k_{\text{diel.}} = nk_{\text{vak.}} \approx nk_{\text{zrak}} \quad ,$$

uspoređivanje faze svodi se na uspoređivanje razlike tzv. **optičkih putova**:

$$\Delta = n_a r_a - n_b r_b \quad .$$

Optički put je, dakle, jednostavno produkt geometrijskog puta i odgovarajućeg indeksa loma. Razlika optičkih putova izjednačuje se s odgovarajućim višekratnikom valne duljine (ili njene polovice) da se nađe uvjet za konstruktivnu ili destruktivnu interferenciju.

U našem konkretnom primjeru sa slike 9.34, razlika optičkih putova jednaka je:

$$\Delta = 2n_1 y - x \quad .$$

Za x i y iz jednostavnih geometrijskih razmatranja možemo dobiti:

$$y = \frac{d}{\cos\theta_t} \quad ,$$

$$x = \sin\theta_u \cdot 2d \,\mathrm{tg}\,\theta_t \quad .$$

Sređivanjem dobivamo:

$$\Delta = 2n_1 y - x = 2n_1 \frac{d}{\cos\theta_t} - 2d \sin\theta_u \,\mathrm{tg}\,\theta_t = \frac{2d}{\cos\theta_t}(n_1 - \sin\theta_t \sin\theta_u) \quad .$$

Upotrebom Snellovog zakona ($\sin\theta_u = n_1 \sin\theta_t$), dobivamo:

$$\Delta = \frac{2d}{\cos\theta_t}\left(n_1 - n_1 \sin^2\theta_t\right) = \frac{2n_1 d}{\cos\theta_t}\cos^2\theta_t = 2n_1 d \cos\theta_t \quad .$$

Razlici optičkih puteva Δ odgovara razlika faze $k\Delta$ (uzimamo valni broj k svjetlosti u zraku, utjecaj indeksa loma već smo uključili u račun optičkih putova). Dakle, interferentni maksimumi za neku valnu duljinu λ vidjet će se kada je ispunjeno (ne smijemo zaboraviti prije diskutiranu razliku faza π):

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2n_1 d \cos\theta_t + \pi = 2m\pi \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \quad ,$$

$$2n_1 d \cos\theta_t + \frac{\lambda}{2} = m\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \quad .$$

Idealno bi bilo ovaj rezultat pomoću Snellovog zakona izraziti preko izlaznog kuta svjetlosti (θ_u), no ta je njegova varijanta matematički "ružna", a ne sadrži nove korisne informacije. I iz ovog oblika rezultata, vidi se da kut pod kojim svjetlost određene valne duljine ima maksimum ovisi o toj valnoj duljini - različite komponente bijele svjetlosti imat će maksimume pod različitim kutovima i to stvara karakteristično razlaganje svjetlosti po bojama spektra.

Zašto je nužno da sloj bude tanak da bi vidjeli interferentni uzorak? Razlog je u tome što je za postizanje interferencije nužna koherentnost svjetlosti. Svjetlost sa Sunca (i s žarulje) je koherentna samo na vremenskoj skali reda 10^{-15}-10^{-14}s (to je povezano s načinom nastanka svjetlosti), čemu odgovara duljina "paketa" koherentne svjetlosti reda veličine par mikrometra. Dakle, da bi zrake reflektirane na različitim površinama bile unutar istog "koherentnog paketa", te površine moraju biti razmaknute za manje od par mikrometra - zbog toga se ova pojava ne uočava na debljim slojevima. Zbog svojih svojstva (gustoće manje od vode, povećane viskoznosti), ulje će prolijemo li ga po površini vode, skoro uvijek formirati tanak sloj, lako uočljiv preko diksutiranog interferentnog uzorka.

Postojanje tankog sloja materijala nekog indeksa loma različitog od okolnih slojeva, može se postići i na druge načine, npr. stvaranjem tankog "klina" zraka između dvije staklene površine (jedne ravne, druge sferične). Interferencijske linije koje tada nastaju imaju oblik krugova koji se standardno nazivaju "Newtonovim kolobarima".

Demonstracijski pokus 9.7: interferencija na klinu zraka između dvaju sfernih leća (Newtonovi kolobari).

Važno uočiti: pojavu tamnih i svijetlih krugova na zastoru; njihov broj i intenzitet.

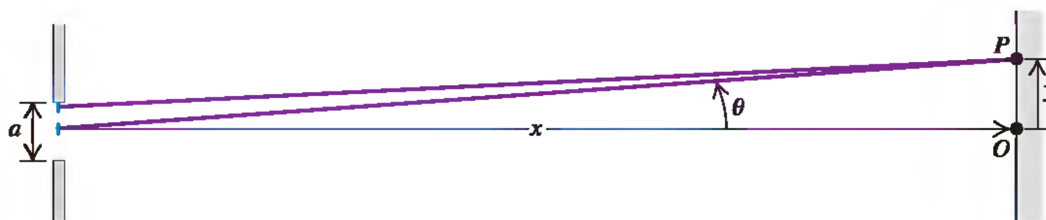
Interferencija na tankom sloju svoju primjenu ima npr. u tzv. *anti-reflektivnim slojevima* koji se nanose na staklene površine za koje želimo da ne reflektiraju svjetlost koja upada na njih (npr. TV-ekrani). Anti-reflektivni slojevi najčešće imaju indeks loma manji od stakla (a veći od zraka), pa zrake reflektirane na dvije strane sloja imaju isti pomak u fazi za π, pa je njihov ukupan relativan pomak u fazi posljedica samo različitih putova. Ako je sloj debeo $1/4\lambda$ (ukupna razlika putova zraka jednaka $1/2\lambda$), interferencija reflektirane svjetlosti bit će destruktivna. Budući da smanjena refleksija vodi na povećanu transmisiju (zbog zakona sačuvanja energije), anti-reflektivni slojevi se stavljaju i na solarne čelije kod kojih je cilj što veći dio upadne energije apsorbirati. Upotrebom višestrukih tankih slojeva refleksiju je (za određenu valnu duljinu) moguće skoro posve suzbiti. Na posve analognim principima funkcionira i *reflektivni sloj*, koji se nanaša na granicu dva optička sredstva kada se želi povećati refleksija.

9.7 Difrakcija svjetlosti

Ogib ili difrakcija svjetlosti je zajednički naziv za niz pojava kojima se manifestira valni karakter svjetlosti pri nailasku na prepreke ili pukotine veličine usporedive s valnom duljinom svjetlosti. Vrlo pojednostavljeno, difrakcija se ponekad naziva "skretanjem svjetlosti iza prepreke"; to je pojava odgovorna za zamućivanje sjena oštrih objekata. U ovom ćemo poglavlju probati objasniti o čemu se točno radi. Difrakcija je kao pojava direktna posljedica interferencije valova, a najlakše ju se diskutira na temelju Huygensovog principa. U optici se razlikuju Fresnelova i Fraunhoferova difrakcija - kod prve se prepreka ili pukotina nalaze blizu zastora za vizualizaciju (što je prekomplicirano za diskusiju u okviru ovog kolegija), dok je kod druge ta udaljenost vrlo velika.

9.7.1 Difrakcija svjetlosti na pukotini

Razmotrimo detaljnije Fraunhoferovu difrakciju. Neka koherentna svjetlost pada na *jednu* pukotinu, čiji otvor *nema* zanemarivu dimenziju kao kod Youngovog eksperimenta. Označimo otvor pukotine s a, kao na slikama 9.35 i 9.36. Udaljenost pukotine od zastora za vizualizaciju označit ćemo s x, a veličine y i θ imaju isti smisao kao i pri razmatranju Youngovog eksperimenta (y je udaljenost točke na zastoru P od osi simetrije pukotine, a θ kut pod kojim se ta točka vidi u odnosu na os simetrije).



Slika 9.35: Geometrija difrakcije na pukotini.

Kod razmatranja difrakcije lakše je pronaći lokaciju tamnih pruga, nego svijetlih. Podijelimo u mislima pukotinu na dvije jednake polovice, kao na slici 9.36. Usporedimo zrake koje kreću iz vrha gornje polovice, i vrha donje polovice - razlika njihovih geometrijskih puteva je jednostavno:

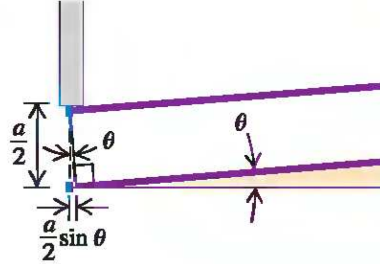
$$\Delta = \frac{a}{2}\sin\theta \quad .$$

Destruktivnu interferenciju te dvije zrake dobit ćemo ako je gornja razlika jednaka neparnom višekratniku polovice valne duljine svjetlosti; za ovo razmatranje dovoljno nam se ograničiti na

$\pm\lambda/2$:

$$\frac{a}{2}\sin\theta = \pm\frac{\lambda}{2} \quad ,$$

$$\sin\theta = \pm\frac{\lambda}{a} \quad . \tag{9.20}$$



Slika 9.36: Uvećan prikaz slike 9.35 oko pukotine.

Krećući od vrhova svake od polovica pukotine, svakoj točki na gornjoj polovici možemo sada pridružiti točku na donjoj polovici tako da odgovarajuće zrake destruktivnu interferiraju. Dakle, ako je ispunjen uvjet 9.20, pod kutom θ pojavit će se tamna pruga.

U sljedećem koraku pukotinu možemo podijeliti na četiri jednaka dijela. Inzistirajući da se zraka ma vrh u prve četvrtine "poništi" za zrakom na vrhu druge četvrtine, dobivamo dodatnu mogućnost za nastanak tamne pruge:

$$\frac{a}{4}\sin\theta = \pm\frac{\lambda}{2} \quad ,$$

$$\sin\theta = \pm\frac{2\lambda}{a} \quad .$$

Analogno gornjem razmatranju, ako je ispunjen ovaj uvjet, za svaku točku prve četvrtine pukotine postoji točka druge četvrtine s kojom će destruktivno interferirati. No sada istu proceduru možemo ponoviti i za treću i četvrtu četvrtinu - u konačnici će sve trake iz pukotine biti poništene pod kutem za koji vrijedi gornji uvjet.

Čitavo razmatranje možemo ponoviti za bilo koju podjelu pukotine na paran broj dijelova (šestine, osmine itd) - **zaključujemo** da će se tamne pruge pojavljivati za sve kutove θ za koje vrijedi:

$$\sin\theta = \pm\frac{m\lambda}{a} \qquad (m = \pm1, \pm2, \ldots) \quad .$$

Ovaj rezultat formalno izgleda isto kao uvjet za svijetle pruge u Youngovom eksperimentu s dvije pukotine (zato oprez!). Sada i vidimo zašto je dovoljno ograničit se na razlike faza $\lambda/2$; neparni višekratnici ništa ne bi promijenili u konačnom rezultatu.

Budući da su pukotine tipično reda veličine 0.1 mm, za svjetlost valne duljine 500 nm omjer λ/a je vrlo malen, pa se u gornjem izrazu može izostaviti sinus:

$$\theta = \pm\frac{m\lambda}{a} \qquad (m = \pm1, \pm2, \ldots) \quad . \tag{9.21}$$

Na zastoru udaljenom x od pukotine, tamne pruge će se pojavljivati na položajima:

$$y_m = \pm x\frac{m\lambda}{a} \qquad (m = \pm1, \pm2, \ldots) \quad .$$

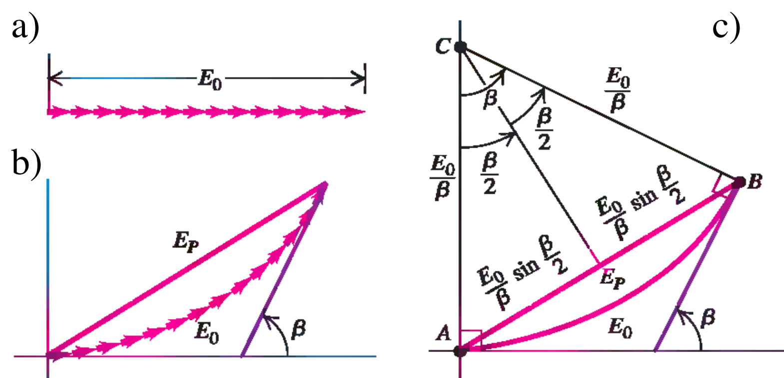
Uz gornje brojke, na zastoru udaljenom 2 metra od pukotine, tamne pruge će biti razmaknute za otprilike 1 cm.

Zašto slično razmatranje ne možemo napraviti ponoviti za svijetle pruge? Pa gornji "recept" ne bi funkcionirao: to što zrake u parovima konstruktivno interferiraju, *ne znači* da pojedini par neće destruktivno interferirati s nekim drugim parom. Traženje maksimuma je stoga kompliciranije i zahtijeva ozbiljniji pristup. Iskoristimo metodu rotirajućih vektora ("fazora").



Slika 9.37: Podjela pukotine na sitne zamišljene djeliće radi primjene metode rotirajućih vektora.

Slika 9.37 prikazuje opet podjelu pukotine na sitne zamišljene djeliće - u nekoj točki P sada se pitamo u kakvoj su relativnoj fazi električna polja $\vec{E}$ koja dolaze zrakom iz pojedinih djelića pukotine. Iznos doprinosa svakog djelića ukupnom električnom polju je jednak - dakle, odgovarajući rotirajući vektori imaju jednaku duljinu, a razlikuju se jedino u fazi.



Slika 9.38: Metoda rotirajućih vektora primjenjena na problem difrakcije na svjetlosti na pukotini.

U točki O nasuprot sredine pukotine duljine prevaljenih putova za svaku od zraka su jednake (u Fraunhoferovoj aproksimaciji), pa su svi rotirajući vektori u fazi (tj. usmjerni u istom smjeru), pa za ukupno polje dobivamo neku vrijednost E_O (slika 9.38a). U nekoj proizvoljnoj točki P na zastoru, tomu više nije tako. Svaki djelić pomaknut je u fazi za neki kut, ovisan o podjeli pukotine na djeliće. Nacrtamo li ih sve, dobivamo ukupno polje kao na slici 9.38b. Kut β je ukupna fazna razlika između vala koji dolazi s gornjeg ruba pukotine i onoga koji dolazi s donje. Dakako, detalji ove slike ovise o broju djelića na koje smo podjelili pukotinu; taj broj nikako ne smije biti premalen, jer 'ce tada i kut β i ukupno polje E_P biti bitno drugačije od prikazanog - na slici 9.38b je prikazana situacija s podjelom pukotine na 15 dijelova.

Podjelimo li pukotinu na još manje djeliće (u limesu, infinitezimalno malene), umjesto pravilnog mnogokuta dobit ćemo luk duljine E_O, kao na slici 9.38c. Centar zakrivljenosti C tog luka dobivamo tako da u točkama A i B povučemo okomicu na njega, a kut pod kojim se luk vidi iz točke C je upravo β (zbog okomitosti odgovarajućih krakova). Polumjer zakrivljenosti luka dan je stoga s

E_0/β, pa za ukupno polje E_p (koje je jednako spojnici AB na slici 9.38c) dobivamo:

$$E_p = 2\frac{E_0}{\beta} \cdot \sin\frac{\beta}{2} = E_0 \cdot \frac{\sin\beta/2}{\beta/2} \quad ,$$

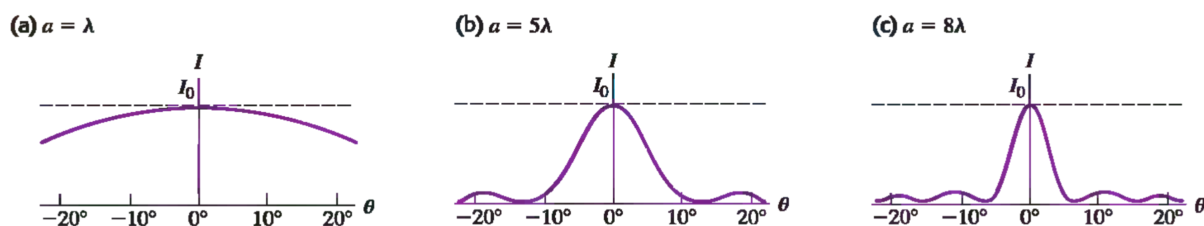
Kut β je posljedica različitih duljina puta dvaju ekstremnih zraka; razliku putova $a\sin\theta$ treba podijeliti s valnom duljinom λ i pomnožiti s 2π da dobijemo odgovarajuću faznu razliku:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a\sin\theta \quad .$$

Konačno, uzimajući u obzir da je intenzitet svjetlosti proporcionalan s kvadratom, električnog polja, dobivamo:

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\pi a\sin\theta/\lambda)}{\pi a\sin\theta/\lambda}\right]^2 \quad ,$$

gdje je I_0 intenzitet svjetlost točno nasuprot pukotine. Na slici 9.39 dana je ovisnost intenziteta o kutu za tri različita omjera a/λ. Što je taj omjer manji (što je pukotina uža), širina središnjog maksimuma intenziteta je veća.



Slika 9.39: Intenzitet svjetlosti kao funkcija kuta kod difrakcije na pukotini, za tri različita omjera a/λ.

Širina središnjog maksimuma intenziteta svjetlosti može se i iščitati iz izraza 9.21; prvi minimumi (koji okružuju središnji maksimum) nalaze se na:

$$\theta_1 = \pm\frac{\lambda}{a} \quad .$$

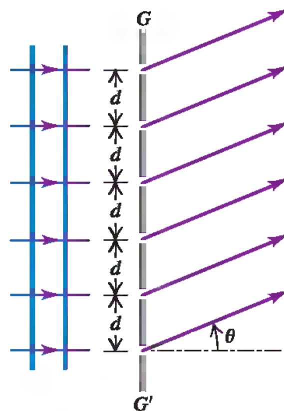
Za male kutove, središnji je maksimum točno dvostruko širi od ostalih. Dok je a reda veličine centimetra, središnji je maksimum toliko uzak da je praktički čitav intenzitet svjetlosti koncentriran točno nasuprot pukotine. No kad a postane manji od λ, središnji se maksimum raširi na 180°, i difrakcijski uzorak nestaje (no difrakcija kao pojava postaje najizraženija). Takva je situacija rijetka za svjetlost, no vrlo redovita za zvuk: zvuk ima tipične valne duljine usporedive dimenzijama vratiju i to je razlog zašto možemo čuti zvuk nastao "iza ugla" (čak i u situaciji kada nema refleksije zvuka na zidovima i sličnim površinama).

Demonstracijski pokus 9.8: difrakcija svjetlosti na pukotini, rupici i tankoj niti.

Važno uočiti: promjena difrakcijskog uzorka s debljinom prepreke.

9.7.2 Difrakcijska rešetka

Difrakcijska rešetka je niz velikog broja paralelnih identičnih pukotina, širine a i razmaka d. Optičke difrakcijske rešetke najčešće se izrađuju pomoću dijamantnih šiljaka, kojima se nanosi veliki broj ogrebotina (tzv. "zareza") na površini stakla ili metala. Općenito razlikujemo refleksijske i transmisijske rešetke; na slici 9.40 shematski je prikazana jedna transmisijska rešetka i način na koji nastaje interferencija na kutu θ.



Slika 9.40: Difrakcijska rešetka.

Pukotine su okomite na ravninu slike 9.40. Prikazano je samo 6 pukotina, dok se u praksi koriste i rešetke sa po par tisuća "zareza" (po milimetru!). Naiđe li ravni val monokromatske svjetlosti okomito na prikazanu rešetku, negdje na zastoru iza nje pojavit će se interferencijski uzorak. Pretpostavimo li da je zastor vrlo daleko od rešetke (Fraunhoferova difrakcija), zrake koje po Huygensovom principu kreću sa svakog od zareza su skoro paralelne.

Difrakcijska rešetka daje svjetlost koja ima velik broj maksimuma i minimuma duž širokog opsega kutova - glavni (najveći) maksimumi pojavit će se kada je interferencija između zraka iz prvih susjednih pukotina konstruktivna. Uvjet za glavni maksimum svodi se stoga na analogan uvjet kod Yougovog eksperimenta s dvije pukotine:

$$d \sin\theta = m\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

Svijetle linije s m=±1 zovemo linijama prvog reda, s m=±2 linijama drugog reda itd. Pada li na rešetku bijela svjetlost, u svakom redu difrakcije imat ćemo čitav spektar boja. Ovisno o geometriji rešetke, pojedini spektri u različitim redovima mogu se i preklapati.

Demonstracijski pokus 9.9: difrakcija svjetlosti na optičkoj rešetci.

Važno uočiti: pravilnost difrakcijskog uzorka, pad intenziteta svjetlosti s porastom difrakcijskog kuta.

Difrakcijski efekt moguće je postići i za reflektiranu svjetlost. Primjer "rešetke" koja radi u tom režimu rada je površina CD-a; razmaci susjednih "zapisa" na njoj su razmaknuti za ≈ 1.5 μm, pa gledamo li svjetlost reflektiranu s CD-a vidimo karakteristčne minimume i maksimume raznih boja.

U praksi se difrakcijska rešetka najčešće koristi za spektroskopiju, odnosno razlaganje spektra kojeg emitira neki izvor (npr. zvijezda) po bojama. Takvo razlaganje tada omogućava pročavanje apsorpcijskih i emisijskih linija u spektru, o čemu će više biti riječi u "Općoj fizici 4". Osim u optičkom području, difrakcija se standardno proučava i npr. za x-zrake. Dakako, zbog njihove manje valne duljine, standardna optička rešetka nije primjenjiva, već ulogu "zareza" preuzimaju susjedne ravnine kristalne rešetke (koje su tipično razmaknute za udaljenosti usporedive s valnom duljinom x-zračenja). Difrakcijska rešetka za x-zračenje je, dakle, jednostavan kristal. I o tome će biti više riječi u kolegiju "Opća fizika 4".